ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Tài liệu ôn thi cao học năm 2005

Phiên bản đã chỉnh sửa

PGS. TS Mỵ Vinh Quang

Ngày 21 tháng 4 năm 2006

Bài 2 : Các Phương Pháp Tính Định Thức Cấp n

Định thức được định nghĩa khá phức tạp, do đó khi tính các định thức cấp cao (cấp lớn hơn 3) người ta hầu như không sử dụng định nghĩa định thức mà sử dụng các tính chất của định thức và thường dùng các phương pháp sau.

1 Phương pháp biến đổi định thức về dạng tam giác

Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng (cột) của ma trận và các tính chất của định thức để biến đổi ma trận của định thức về dạng tam giác. Định thức sau cùng sẽ bằng tích của các phần tử thuộc đường chéo chính (theo *tính chất 3.3*).

Ví dụ 1.1: Tính định thức cấp n ($n \geqslant 2$) sau đây:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix}$$

Bài giải: Nhân dòng (2) với (-1) rồi cộng vào dòng (3), (4), ..., (n). Ta có

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-2 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & -2 & -2 & \dots & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-2 \end{vmatrix} = (-2)(n-2)!$$

(1): nhân dòng (1) với (-2) cộng vào dòng (2).

Ví dụ 1.2: Tính định thức cấp n

$$D = \begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix}$$

Bài giải: Đầu tiên công các cột (2), (3),. . . , (n) vào cột (1). Sau đó nhân dòng (1) với (-1) cộng vào các dòng (2), (3),. . . , (n). Ta có:

$$D = \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \dots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \dots & b \\ a+(n-1)b & b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a+(n-1)b & b & b & \dots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \dots & b \\ 0 & a-b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a-b \end{vmatrix}$$
$$= \big(a+(n-1)b\big)(a-b)^{n-1}$$

2 Phương pháp qui nạp

Áp dụng các tính chất của định thức, biến đổi, khai triển định thức theo dòng hoặc theo cột để biểu diễn định thức cần tính qua các định thức cấp bé hơn nhưng có cùng dạng. Từ đó ta sẽ nhận được công thức truy hồi.

Sử dụng công thức truy hồi và tính trực tiếp các định thức cùng dạng cấp 1, cấp 2, . . . , để suy ra định thức cần tính.

Ví dụ 2.1: Tính định thức

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1b_1 & a_1b_2 & \dots & a_1b_n \\ a_2b_1 & 1+a_2b_2 & \dots & a_2b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \dots & 1+a_nb_n \end{vmatrix}$$

Bài giải: Sử dụng *tính chất 2.4*, tách định thức theo cột n, ta có:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1b_1 & \dots & a_1b_{n-1} & 0 \\ a_2b_1 & \dots & a_2b_{n-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1}b_1 & \dots & 1+a_{n-1}b_{n-1} & 0 \\ a_nb_1 & \dots & a_nb_{n-1} & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1+a_1b_1 & \dots & a_1b_{n-1} & a_1b_n \\ a_2b_1 & \dots & a_2b_{n-1} & a_2b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1}b_1 & \dots & 1+a_{n-1}b_{n-1} & a_{n-1}b_n \\ a_nb_1 & \dots & a_nb_{n-1} & a_nb_n \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 1+a_1b_1 & \dots & a_1b_{n-1} & 0 \\ a_2b_1 & \dots & a_2b_{n-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1}b_1 & \dots & 1+a_{n-1}b_{n-1} & 0 \\ a_nb_1 & \dots & a_nb_{n-1} & 1 \end{vmatrix} + b_n \begin{vmatrix} 1+a_1b_1 & \dots & a_1b_{n-1} & a_1 \\ a_2b_1 & \dots & a_2b_{n-1} & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1}b_1 & \dots & 1+a_{n-1}b_{n-1} & a_{n-1} \\ a_nb_1 & \dots & a_nb_{n-1} & a_n \end{vmatrix}$$

Khai triển định thức đầu theo cột (n) ta sẽ có định thức đầu bằng D_{n-1}.

Nhân cột (n) của định thức thứ hai lần lượt với $(-b_i)$ rồi cộng vào cột i $(i = 1, 2, \dots, n-1)$.

Ta được:

$$D_n = D_{n-1} + b_n \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{vmatrix} = D_{n-1} + a_n b_n$$

Vậy ta có công thức truy hồi $D_n = D_{n-1} + a_n b_n$. Vì công thức trên đúng với mọi n nên ta có

$$D_n = D_{n-1} + a_n b_n = \big(D_{n-2} + a_{n-1}b_{n-1}\big) + a_n b_n = \dots = D_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \dots + a_n b_n$$

Vì $D_1 = a_1 b_1 + 1$ nên cuối cùng ta có

$$D_n = 1 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \dots + a_n b_n$$

Ví dụ 2.2: Cho $a, b \in \mathbb{R}, a \neq b$. Tính định thức cấp n

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

Bài giải: Khai triển định thức theo dòng đầu, ta được:

$$D_n = (a+b)D_{n-1} - ab \begin{vmatrix} 1 & ab & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a+b & ab & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a+b \end{vmatrix}$$

Tiếp tục khai triển định thức sau theo cột (1) ta có công thức:

$$D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2} \text{ với } n \geqslant 3 \tag{$*$}$$

Do đó:

$$D_n - aD_{n-1} = b(D_{n-1} - aD_{n-2})$$

Công thức này đúng với mọi $n \geqslant 3$ nên ta có

$$D_n - aD_{n-1} = b(D_{n-1} - aD_{n-2}) = b^2(D_{n-2} - aD_{n-3}) = \dots = b^{n-2}(D_2 - aD_1)$$

Tính toán trực tiếp ta có $D_2 = a^2 + b^2 + ab$ và $D_1 = a + b$ do đó $D_2 - aD_1 = b^2$. Bởi vậy

$$D_n - aD_{n-1} = b^n \tag{1}$$

Tiếp tục, từ công thức $(*)$ ta lại có $D_n - bD_{n-1} = a(D_{n-1} - bD_{n-2})$. Do công thức này đúng với mọi $n \geqslant 3$ nên tương tự như trên ta lại có

$$\begin{aligned} D_n - bD_{n-1} &= a(D_{n-1} - bD_{n-2}) = a^2(D_{n-3} - bD_{n-4}) \\ &= \dots = a^{n-2}(D_2 - bD_1) = a^n \text{ vì } D_2 - bD_1 = a^2 \end{aligned}$$

Vậy ta có

$$D_n - bD_{n-1} = a^n \tag{2}$$

Khử D_{n-1} từ trong (1) và (2) ta sẽ được kết quả

$$D_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}$$

3 Phương pháp biểu diễn định thức thành tổng các định thức

Nhiều định thức cấp n có thể tính được dễ dàng bằng các tách định thức (theo các dòng hoặc theo các cột) thành tổng của các định thức cùng cấp. Các định thức mới này thường bằng 0 hoặc tính được dễ dàng.

Ví dụ 3.1: Ta sẽ tính định thức D_n trong Ví dụ 2.1 bằng phương pháp này.

Bài giải: Mỗi cột của D_n được viết thành tổng của 2 cột mà ta ký hiệu là cột loại (1) và loại (2) như sau:

$$D_n = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1 + a_1b_1 & 0 + a_1b_2 & \dots & 0 + a_1b_n \\ 0 + a_2b_1 & 1 + a_2b_2 & \dots & 0 + a_2b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 + a_nb_1 & 0 + a_nb_2 & \dots & 1 + a_nb_n \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} (1)\ \ (2) & (1)\ \ (2) & & (1)\ \ (2) \end{matrix} \end{array}$$

Sử dụng *tính chất 2.4* của định thức, ta lần lượt tách các cột của định thức. Sau n lần tách ta có D_n là tổng của 2^n định thức cấp n. Cột thứ i của các định thức này chính là cột loại (1) hoặc loại (2) của cột thứ i của định thức ban đầu D_n. Ta chia 2^n định thức này thành ba dạng như sau:

Dạng 1: Bao gồm các định thức có từ 2 cột loại (2) trở lên. Vì các cột loại (2) tỉ lệ nên tất cả các định thức loại này có giá trị bằng 0.

Dạng 2: Bao gồm các định thức có đúng một cột loại (2), còn các cột khác là loại (1). Giả sử cột i là loại (2) ta có định thức đó là

$$D_{n,i} = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & a_1b_i & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & a_2b_i & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_nb_i & \dots & 1 \end{vmatrix} \\ \uparrow \\ \text{cột } i \end{array} = a_ib_i$$

(khai triển theo cột i). Có tất cả n định thức dạng 2 (ứng với $i = 1, 2, \dots, n$) và tổng của tất cả các định thức dạng 2 là

$$\sum_{i=1}^{n} a_ib_i$$

Dạng 3: Bao gồm các định thức không có cột loại (2), nên tất cả các cột đều là loại (1) và do đó có đúng một định thức dạng 3 là

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Vậy D_n bằng tổng của tất cả các định thức ba dạng trên và bằng

$$\sum_{i=1}^{n} a_ib_i + 1$$

Nhận xét: Tất cả các định thức mà các cột (dòng) có thể biểu diễn dưới dạng tổng 2 cột (2 dòng) trong đó các cột loại (2) (dòng loại (2)) tỉ lệ với nhau đều có thể tính được dễ dàng bằng phương pháp 3 với cách trình bày giống hệt như trên.

4 Phương pháp biểu diễn định thức thành tích các định thức

Giả sử ta cần tính định thức D cấp n. Ta biểu diễn ma trận tương ứng A của D thành tích các ma trận vuông cấp n đơn giản hơn: $A = B.C$. Khi đó ta có

$$D = \det A = \det(B.C) = \det B.\det C$$

với các định thức $\det B$, $\det C$ tính được dễ dàng nên D tính được.

Ví dụ 4.1: Tính định thức cấp n ($n \geqslant 2$) sau

$$D = \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$$

Bài giải: Với $n \geqslant 2$ ta có:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_3 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{C} \end{aligned}$$

Bởi vậy:

$$D = \det A = \det B.\det C = \begin{cases} 0 & \text{nếu } n > 2 \\ (x_2 - x_1)(y_2 - y_1) & \text{nếu } n = 2 \end{cases}$$

Ví dụ 4.2: Tính định thức cấp n ($n \geqslant 2$)

$$D = \begin{vmatrix} \sin 2\alpha_1 & \sin(\alpha_1+\alpha_2) & \dots & \sin(\alpha_1+\alpha_n) \\ \sin(\alpha_2+\alpha_1) & \sin 2\alpha_2) & \dots & \sin(\alpha_2+\alpha_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin(\alpha_n+\alpha_1) & \sin(\alpha_n+\alpha_2) & \dots & \sin 2\alpha_n \end{vmatrix}$$

Bài giải: Với $n \geqslant 2$ ta có:

$$A = \begin{bmatrix} \sin 2\alpha_1 & \sin(\alpha_1+\alpha_2) & \dots & \sin(\alpha_1+\alpha_n) \\ \sin(\alpha_2+\alpha_1) & \sin 2\alpha_2 & \dots & \sin(\alpha_2+\alpha_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin(\alpha_n+\alpha_1) & \sin(\alpha_n+\alpha_2) & \dots & \sin 2\alpha_n \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 & 0 & \dots & 0 \\ \sin\alpha_3 & \cos\alpha_3 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin\alpha_n & \cos\alpha_n & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \dots & \cos\alpha_n \\ \sin\alpha_1 & \sin\alpha_2 & \dots & \sin\alpha_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{C}$$

Bởi vậy:

$$D = \det A = \det B . \det C = \begin{cases} 0 \text{ nếu } n > 2 \\ -\sin^2(\alpha_1 - \alpha_2) \text{ nếu } n = 2 \end{cases}$$

Bài Tập

Tính các định thức cấp n sau:

6. $\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & 1+a_3 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & 1+a_n \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & x & \dots & x \\ 1 & x & 0 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x & x & \dots & 0 \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} a_1 & x & \dots & x \\ x & a_2 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & \dots & a_n \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \dots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \dots & a_2+b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix}$

11. $\begin{vmatrix} \cos(\alpha_1-\beta_1) & \cos(\alpha_1-\beta_2) & \dots & \cos(\alpha_1-\beta_n) \\ \cos(\alpha_2-\beta_1) & \cos(\alpha_2-\beta_2) & \dots & \cos(\alpha_2-\beta_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos(\alpha_n-\beta_1) & \cos(\alpha_n-\beta_2) & \dots & \cos(\alpha_n-\beta_n) \end{vmatrix}$

Tính các định thức cấp $2n$ sau

12. $\begin{vmatrix} a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & b \\ 0 & a & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & b & a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & a \end{vmatrix}$

(đường chéo chính là a, đường chéo phụ là b, tất cả các vị trí còn lại là 0)

13. $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 & 0 & b_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n & 0 & 0 & \dots & b_n \\ c_1 & 0 & \dots & 0 & d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & \dots & 0 & 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_n & 0 & 0 & \dots & d_n \end{vmatrix}$