GIẢI TÍCH (CƠ SỞ)

Phần 1. **Không gian metric**

§1. Metric trên một tập hợp. Sự hội tụ. Không gian đầy đủ

Phiên bản đã chỉnh sửa

PGS TS Nguyễn Bích Huy

(Typing by *thuantd*)

Ngày 10 tháng 11 năm 2004

A. Tóm tắt lý thuyết

1. Không gian metric

Định nghĩa 1. Cho tập $X \neq \varnothing$. Một ánh xạ d từ $X \times X$ vào $\mathbb{R}$ được gọi là một metric trên X nếu các điều kiện sau được thỏa mãn $\forall x, y, z \in X$:

i. $d(x,y) \geq 0$

   $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

ii. $d(x,y) = d(y,x)$

iii. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (bất đẳng thức tam giác)

Nếu d là metric trên X thì cặp (X,d) gọi là một không gian metric.

Nếu d là metric trên X thì nó cũng thỏa mãn tính chất sau

$$|d(x,y) - d(u,v)| \leq d(x,u) + d(y,v) \text{ (bất đẳng thức tứ giác)}$$

Ví dụ 1. Ánh xạ $d : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, định bởi

$$d(x,y) = \left[\sum_{i=1}^{m} (x_i - y_i)^2\right]^{1/2}, \qquad x = (x_1, \ldots, x_m),\ y = (y_1, \ldots, y_m)$$

là một metric trên $\mathbb{R}^m$, gọi là metric thông thường của $\mathbb{R}^m$.

Khi $m = 1$, ta có $d(x, y) = |x - y|$

Trên $\mathbb{R}^m$ ta cũng có các metric khác như

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{m} |x_i - y_i|$$

$$d_2(x, y) = \max_{1 \le i \le m} |x_i - y_i|$$

Ví dụ 2. Ký hiệu $C_{[a,b]}$ là tập hợp các hàm thực $x = x(t)$ liên tục trên $[a, b]$. Ánh xạ

$$d(x, y) = \sup_{a \le t \le b} |x(t) - y(t)|, \quad x, y \in C_{[a,b]}$$

là metric trên $C_{[a,b]}$, gọi là metric hội tụ đều.

2. Sự hội tụ

Định nghĩa 2. Cho không gian metric (X, d). Ta nói dãy phần tử $\{x_n\} \subset X$ *hội tụ* (*hội tụ theo metric* d, nếu cần làm rõ) về phần tử $x \in X$ nếu $\lim\limits_{n \to \infty} d(x_n, x) = 0$.

Khi đó ta viết

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x \text{ trong } (X, d)$$
$$x_n \xrightarrow{d} x$$
$$x_n \to x$$
$$\lim x_n = x$$

Như vậy, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$ trong (X, d) có nghĩa

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 : \forall n \in \mathbb{N}^*, n \ge n_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$$

Ta chú ý rằng, các metric khác nhau trên cùng tập X sẽ sinh ra các sự hội tụ khác nhau.

Tính chất

1. Giới hạn của một dãy hội tụ là duy nhất.
2. Nếu dãy $\{x_n\}$ hội tụ về x thì mọi dãy con của nó cũng hội tụ về x.
3. Nếu $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = y$ thì $\lim\limits_{n \to \infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)$

Ví dụ 3. Trong $\mathbb{R}^m$ ta xét metric thông thường. Xét phần tử $a = (a_1, \ldots, a_m)$ và dãy $\{x^n\}$ với $x^n = (x_1^n, \ldots, x_m^n)$. Ta có

$$d(x_n, a) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i^n - a_i)^2} \ge |x_i^n - a_i|, \quad \forall i = 1, \ldots, m$$

Từ đây suy ra:

$$\lim_{n\to\infty} x^n = a \text{ trong } (\mathbb{R}^m, d) \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_i^n = a_i \text{ trong } \mathbb{R},\ \forall i = 1, \ldots, n$$

Ví dụ 4. Trong $C_{[a,b]}$ ta xét "metric hội tụ đều". Ta có

$$\begin{aligned} x_n \xrightarrow{d} x &\Longleftrightarrow (\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \Rightarrow \sup_{a\leq t\leq b} |x_n(t) - x(t)| < \varepsilon) \\ &\Longleftrightarrow \text{dãy hàm } \{x_n(t)\} \text{ hội tụ đều trên } [a, b] \text{ về hàm } x(t) \\ &\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n(t) = x(t), \quad \forall t \in [a, b] \end{aligned}$$

Như vậy, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) = x(t)$, $\forall t \in [a, b]$ là điều kiện cần để $\lim x_n = x$ trong $C_{[a,b]}$ với metric hội tụ đều.

Chú ý này giúp ta dự đoán phần tử giới hạn.

3. Không gian metric đầy đủ

Định nghĩa 3. Cho không gian metric (X, d). Dãy $\{x_n\} \subset X$ được gọi là *dãy Cauchy* (dãy cơ bản) nếu $\lim\limits_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m) = 0$
hay

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 : \forall n, m \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Tính chất

1. Nếu $\{x_n\}$ hội tụ thì nó là dãy Cauchy.
2. Nếu dãy $\{x_n\}$ là dãy Cauchy và có dãy con hội tụ về x thì $\{x_n\}$ cũng hội tụ về x.

Định nghĩa 4. Không gian metric (X, d) gọi là đầy đủ nếu mỗi dãy Cauchy trong nó đều là dãy hội tụ.

Ví dụ 5. Không gian $\mathbb{R}^m$ với metric d thông thường là đầy đủ.

Thật vậy, xét tùy ý dãy Cauchy $\{x^n\}$, $x^n = (x_1^n, \ldots, x_m^n)$.

$\diamond$ Vì $\begin{cases} d(x^n, x^k) \geq |x_i^n - x_i^k| \quad (i = 1, \ldots, m) \\ \lim\limits_{n,k\to\infty} d(x^n, x^k) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{n,k\to\infty} |x_i^n - x_i^k| = 0,$

nên ta suy ra các dãy $\{x_i^n\}_n$ $(i = 1, \ldots, m)$ là dãy Cauchy trong $\mathbb{R}$, do đó chúng hội tụ vì $\mathbb{R}$ đầy đủ.

$\diamond$ Đặt $a_i = \lim\limits_{n\to\infty} x_i^n \quad (i = \overline{1, m})$ và xét phần tử $a = (a_1, \ldots, a_m)$, ta có $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = a$ trong $(\mathbb{R}^m, d)$.

Ví dụ 6. Không gian $C_{[a,b]}$ với metric hội tụ đều d là đầy đủ.

Giả sử $\{x_n\}$ là dãy Cauchy trong $(C_{[a,b]}, d)$.

Với mỗi $t \in [a,b]$, ta có $|x_n(t) - x_m(t)| \leq d(x_n, x_m)$. Từ giả thiết $\lim\limits_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m) = 0$ ta cũng có $\lim\limits_{n,m\to\infty} |x_n(t) - x_m(t)| = 0$

Vậy với mỗi $t \in [a,b]$ thì $\{x_n(t)\}$ là dãy Cauchy trong $\mathbb{R}$, do đó là dãy hội tụ.

$\diamond$ Lập hàm x xác định bởi $x(t) = \lim x_n(t), \quad t \in [a,b]$.

Ta cần chứng minh $x \in C_{[a,b]}$ và $\lim d(x_n, x) = 0$.

Cho $\varepsilon > 0$ tùy ý. Do $\{x_n\}$ là dãy Cauchy, ta tìm được n_0 thỏa

$$\forall n, m \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Như vậy ta có

$$|x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0, \forall m \geq n_0, \quad \forall t \in [a,b]$$

Cố định n, t và cho $m \to \infty$ trong bất đẳng thức trên ta có

$$|x_n(t) - x(t)| \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0, \quad \forall t \in [a,b]$$

Như vậy, ta đã chứng minh rằng

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \Rightarrow \sup_{a \leq t \leq b} |x_n(t) - x(t)| \leq \varepsilon$$

Từ đây suy ra:

- Dãy hàm liên tục $\{x_n(t)\}$ hội tụ đều trên $[a,b]$ về hàm $x(t)$, do đó hàm $x(t)$ liên tục trên $[a,b]$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$.

Đây là điều ta cần chứng minh.

B. Bài tập

Bài 1. Cho không gian metric (X,d). Ta định nghĩa

$$d_1(x,y) = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)} \qquad , x, y \in X$$

1. Chứng minh d_1 là metric trên X.
2. Chứng minh $\quad x_n \xrightarrow{d_1} x \quad \Longleftrightarrow \quad x_n \xrightarrow{d} x$
3. Giả sử (X,d) đầy đủ, chứng minh (X,d_1) đầy đủ.

Giải

1. Hiển nhiên d_1 là một ánh xạ từ $X \times X$ vào $\mathbb{R}$. Ta kiểm tra d_1 thỏa mãn các điều kiện của metric

(i) Ta có: $d_1(x,y) \geq 0$ do $d(x,y) \geq 0$
$d_1(x,y) = 0 \leftrightarrow d(x,y) = 0 \leftrightarrow x = y$

(ii) $d_1(y,x) = \dfrac{d(y,x)}{1+d(y,x)} = \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = d(x,y)$

(iii) Ta cần chứng minh

$$\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \leq \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} + \frac{d(z,y)}{1+d(z,y)}$$

Để gọn, ta đặt $a = d(x,y)$, $b = d(x,z)$, $c = d(z,y)$.
Ta có $a \leq b + c$; $a, b, c \geq 0$ (do tính chất của d)

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{a}{1+a} \leq \frac{b+c}{1+b+c} \qquad \Big(\text{ do hàm } \frac{t}{1+t} \text{ tăng trên } [0,\infty)\Big) \\ &\Rightarrow \frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b+c} + \frac{c}{1+b+c} \\ &\qquad\quad \leq \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} \qquad (\text{đpcm}) \end{aligned}$$

2. $\diamond$ Giả sử $x_n \xrightarrow{d} x$. Ta có

$$\lim d(x_n,x) = 0$$

$$d_1(x_n,x) = \frac{d(x_n,x)}{1+d(x_n,x)}$$

Do đó, $\lim d_1(x_n,x) = 0$ hay $x_n \xrightarrow{d_1} x$

$\diamond$ Giả sử $x_n \xrightarrow{d_1} x$. Từ

$$\lim d_1(x_n,x) = 0$$

$$d(x_n,x) = \frac{d_1(x_n,x)}{1-d_1(x_n,x)}$$

ta suy ra $\lim d(x_n,x) = 0$ hay $x_n \xrightarrow{d} x$.

3. Xét tùy ý dãy Cauchy $\{x_n\}$ trong (X,d_1), ta cần chứng minh $\{x_n\}$ hội tụ trong (X,d_1).

$\diamond$ Ta có

$$\lim_{n,m\to\infty} d_1(x_n,x_m) = 0$$

$$d(x_n,x_m) = \frac{d_1(x_n,x_m)}{1-d_1(x_n,x_m)}$$

$\Rightarrow \lim\limits_{n,m\to\infty} d(x_n,x_m) = 0$ hay $\{x_n\}$ là dãy Cauchy trong (X,d)

$\Rightarrow \{x_n\}$ là hội tụ trong (X,d) (vì (X,d) đầy đủ)

$\diamond$ Đặt $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ (trong (X,d)), ta có $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ trong (X,d_1) (do câu 2).

Bài 2. Cho các không gian metric (X_1, d_1), (X_2, d_2). Trên tập $X = X_1 \times X_2$ ta định nghĩa

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$$

1. Chứng minh d là metric trên X
2. Giả sử $x^n = (x_1^n, x_2^n) \quad (n \in \mathbb{N}^*)$, $a = (a_1, a_2)$. Chứng minh

$$x^n \xrightarrow{d} a \iff \begin{cases} x_1^n \xrightarrow{d_1} a_1 \\ x_2^n \xrightarrow{d_2} a_2 \end{cases}$$

3. Giả sử (X_1, d_1), (X_2, d_2) đầy đủ. Chứng minh (X, d) đầy đủ.

Bài 3. Ký hiệu S là tập hợp các dãy số thực $x = \{a_k\}_k$. Ta định nghĩa

$$d(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} . \frac{|a_k - b_k|}{1 + |a_k - b_k|}, \qquad x = \{a_k\}, y = \{b_k\}$$

1. Chứng minh d là metric trên X
2. Giả sử $x_n = \{a_k^n\}_k$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x = \{a_k\}_k$. Chứng minh

$$x_n \xrightarrow{d} x \quad \iff \quad \lim_{n \to \infty} a_k^n = a_k \, , \ \forall k \in \mathbb{N}^*$$

3. Chứng minh (S, d) đầy đủ.

Bài 4. Trên $X = C_{[0,1]}$ xét các metric

$$d(x, y) = \sup_{0 \le x \le 1} |x(t) - y(t)|$$

$$d_1(x, y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)| \, dt$$

1. Chứng minh: $(x_n \xrightarrow{d} x) \Rightarrow (x_n \xrightarrow{d_1} x)$
2. Bằng ví dụ dãy $x_n(t) = n(t^n - t^{n+1})$, chứng minh chiều "$\Leftarrow$" trong câu 1) có thể không đúng.
3. Chứng minh (X, d_1) không đầy đủ.