ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Tài liệu ôn thi cao học năm 2005

Phiên bản đã chỉnh sửa

PGS. TS Mỵ Vinh Quang

Ngày 10 tháng 11 năm 2004

Bài 3 : Giải Bài Tập Định Thức

1. **Tính**
$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \\ \gamma & \alpha & \beta \end{vmatrix}$ trong đó α, β, γ là các nghiệm của phương trình :$x^3+px+q=0$

Giải :

Theo định lí Viet ta có $\alpha+\beta+\gamma=0$
Cộng cột (1), cột (2) vào cột (3) ta có:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \\ \gamma & \alpha & \beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \alpha+\beta+\gamma \\ \beta & \gamma & \alpha+\beta+\gamma \\ \gamma & \alpha & \alpha+\beta+\gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \beta & \gamma & 0 \\ \gamma & \alpha & 0 \end{vmatrix} = 0$$

2. **Giải phương trình**

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix}$$

Giải :

Khai triển định thức vế trái theo dòng đầu, ta sẽ có vế trái là một đa thức bậc 3 của x, kí hiệu là $f(x)$. Ta có $f(2) = 0$ vì khi đó định thức ở vế trái có 2 dòng đầu bằng nhau. Tương tự $f(3) = 0, f(4) = 0$. Vì $f(x)$ là đa thức bậc 3, có 3 nghiệm là 2, 3, 4 nên phương trình trên có nghiệm là 2, 3, 4.

3. **Chứng minh**

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & b_1 + c_1 & c_1 + a_1 \\ a_2 + b_2 & b_2 + c_2 & c_2 + a_2 \\ a_3 + b_3 & b_3 + c_3 & c_3 + a_3 \end{vmatrix} = 0$$

Giải :

Nhân cột (2) với (-1), cột (3) với 1 rồi cộng vào cột (1), ta có:

$$\begin{aligned} VT &= \begin{vmatrix} 2a_1 & b_1 + c_1 & c_1 + a_1 \\ 2a_2 & b_2 + c_2 & c_2 + a_2 \\ 2a_3 & b_3 + c_3 & c_3 + a_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 + c_1 & c_1 + a_1 \\ a_2 & b_2 + c_2 & c_2 + a_2 \\ a_3 & b_3 + c_3 & c_3 + a_3 \end{vmatrix} \\ &\overset{(1)}{=} 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 + c_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 + c_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 + c_3 & c_3 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Giải thích:
(1) : nhân cột (1) với (-1) cộng vào cột (3)
(2) : nhân cột (3) với (-1) cộng vào cột (2)

4. **Chứng minh**

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0$$

Giải :

$$VT \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & 2a+3 & 6a+9 \\ b^2 & (b+1)^2 & 2b+3 & 6b+9 \\ c^2 & (c+1)^2 & 2c+3 & 6c+9 \\ d^2 & (d+1)^2 & 2d+3 & 6d+9 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} 0$$

Giải thích:
(1) : Nhân cột (1) với (-1) cộng vào cột (4), nhân cột (2) với (-1) cộng vào cột (3)
(2) : Định thức có 2 cột tỷ lệ

5. **Tính định thức**

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & 1+a_3 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

Giải :

$$VT \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1+a_1+\ldots+a_n & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ 1+a_1+\ldots+a_n & 1+a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ 1+a_1+\ldots+a_n & a_2 & 1+a_3 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1+a_1+\ldots a_n & a_2 & a_3 & \dots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

$$\overset{(2)}{=} \begin{vmatrix} 1+a_1+\ldots+a_n & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1+a_1+\ldots+a_n$$

Giải thích:

(1): Cộng các cột (2), (3),..., (n) vào cột (1)

(2): Nhân dòng (1) với (-1) rồi cộng vào các dòng (2), (3), ..., (n)

6. **Tính định thức**

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & x & \dots & x \\ 1 & x & 0 & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x & x & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Giải :

Với $x \neq 0$

$$VT \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -x & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -x \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} \begin{vmatrix} \frac{n-1}{x} & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x \end{vmatrix}$$

$= \dfrac{n-1}{x}(-x)^{n-1} = (-1)^{n-1}(n-1)x^{n-2}\ (n \geq 2)$

Giải thích:

(1): Nhân dòng (1) với (-x) cộng vào dòng (2), (3), ..., (n)

(2): Nhân cột (2), (3), ..., (n) với $\dfrac{1}{x}$ rồi cộng tất cả vào cột (1)

Dễ thấy khi $x = 0$, đáp số trên vẫn đúng do tính liên tục của định thức.

7. **Tính định thức**

$$D_n = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

Giải :

Khai triển định thức theo dòng đầu ta có :

$$D_n = 5D_{n-1} - 3\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

Tiếp tục khai triển định thức theo cột (1) ta có công thức truy hồi :

$$D_n = 5D_{n-1} - 6D_{n-2} \quad (*) \quad (n \geq 3)$$

Từ (*) ta có :

$$D_n - 2D_{n-1} = 3(D_{n-1} - 2D_{n-2})$$

Do công thức đúng với mọi $n \geq 3$ nên ta có:

$D_n - 2D_{n-1} = 3(D_{n-1} - 2D_{n-2}) = 3^2(D_{n-2} - 2D_{n-3}) = \ldots = 3^{n-2}(D_2 - 2D_1)$

Tính toán trực tiếp ta có $D_2 = 19$, $D_1 = 5$ nên $D_2 - 2D_1 = 9$. Bởi vậy ta có:

$$D_n - 2D_{n-1} = 3^n \quad (1)$$

Mặt khác, cũng từ công thức (*) ta có:

$$D_n - 3D_{n-1} = 2(D_{n-1} - 3D_{n-2})$$

Tương tự như trên ta có:

$$D_n - 3D_{n-1} = 2(D_{n-1} - 3D_{n-2}) = 2^2(D_{n-2} - 3D_{n-3}) = \ldots = 2^{n-2}(D_2 - 3D_1) = 2^n$$

Vậy ta có:

$$D_n - 3D_{n-1} = 2^n \quad (2)$$

Khử D_{n-1} từ trong (1) và (2) ta có:

$$D_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$$

(Bạn đọc có thể so sánh cách giải bài này với cách giải ở ví dụ 4)

8. **Tính định thức**

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & x & \ldots & x \\ x & a_2 & \ldots & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & \ldots & a_n \end{vmatrix}$$

Giải :

Định thức này có thể tính bằng phương pháp biểu diễn định thức thành tổng các định thức. Trước hết ta viết định thức dưới dạng:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 - x + x & 0 + x & \ldots & 0 + x \\ 0 + x & a_2 - x + x & \ldots & 0 + x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 + x & 0 + x & \ldots & a_n - x + x \end{vmatrix}$$
$$\begin{matrix} (1) \ (2) & (1) \ (2) & & (1) \ (2) \end{matrix}$$

Lần lượt tách các cột của định thức, sau n lần tách ta có định thức D bằng tổng của 2^n định thức cấp n. Cột thứ i của các định thức này chính là cột loại (1) hoặc loại (2) của cột thứ i của định thức ban đầu D. Chia 2^n định thức này thành 3 dạng như sau:

Dạng 1: Bao gồm các định thức có từ 2 cột loại (2) trở lên. Vì các cột loại (2) bằng nhau nên tất cả các định thức dạng này đều bằng 0.

Dạng 2: Bao gồm các định thức có đúng một cột loại (2), còn các cột khác là loại (1).

Giả sử cột i là loại (2). Ta có định thức đó là:

$$\begin{array}{c} \\ D_i = \left|\begin{matrix} a_1 - x & 0 & \dots & x & \dots & 0 \\ 0 & a_2 - x & \dots & x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x & \dots & a_n - x \end{matrix}\right| \\ \qquad\qquad\qquad\quad \uparrow \\ \qquad\qquad\qquad\quad \text{cột} i \end{array}$$

$$\stackrel{(1)}{=} x(a_1 - x)\dots(a_{i-1} - x)(a_{i+1} - x)\dots(a_n - x) \quad = \frac{x\prod\limits_{k=1}^{n}(a_k - x)}{a_i - x}$$

((1) khai triển định thức theo cột i)
Có tất cả n định thức dạng 2 (ứng với $i = 1, 2, \dots, n$) và tổng của tất cả các định thức dạng 2 là:

$$x(a_1 - x)\dots(a_n - x)\left[\frac{1}{a_1 - x} + \dots + \frac{1}{a_n - x}\right]$$

Dạng 3: Bao gồm các định thức không có cột loại (2), nên tất cả các cột đều là loại (1). Và do đó có đúng 1 định thức dạng (3) là:

$$\begin{vmatrix} a_1 - x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 - x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n - x \end{vmatrix} = (a_1 - x)\dots(a_n - x)$$

Vậy D bằng tổng của tất cả các định thức của 3 dạng trên và bằng:

$$x(a_1 - x)\dots(a_n - x)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{a_1 - x} + \dots + \frac{1}{a_n - x}\right)$$

9. **Tính**

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_1 + b_2 & \dots & a_1 + b_n \\ a_2 + b_1 & a_2 + b_2 & \dots & a_2 + b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n + b_1 & a_n + b_3 & \dots & a_n + b_n \end{vmatrix} = 0$$

Giải :

Định thức này có thể được tính bằng phương pháp biểu diễn định thức thành tổng các định thức với cách giải tương tự như bài 8. *Chi tiết của cách giải này xin dành cho bạn đọc.* Ở đây chúng tôi đưa ra một cách tính nửa dựa vào phương pháp biểu diễn định thức thành tích các định thức. Với $n \geq 2$ ta có:

$$A = \begin{bmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \dots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \dots & a_2+b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_3 & \dots & a_n+b_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{C}$$

Bởi vậy, ta có:

$$D = detA = det(BC) = detB.detC = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad n > 2 \\ (a_1-a_2)(b_2-a_1) & \text{nếu} \quad n = 2 \end{cases}$$

10. **Tính**

$$\begin{vmatrix} \cos(\alpha_1-\beta_1) & \cos(\alpha_1-\beta_2) & \dots & \cos(\alpha_1-\beta_n) \\ \cos(\alpha_2-\beta_1) & \cos(\alpha_2-\beta_2) & \dots & \cos(\alpha_2-\beta_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos(\alpha_n-\beta_1) & \cos(\alpha_n-\beta_2) & \dots & \cos(\alpha_n-\beta_n) \end{vmatrix}$$

Để tính định thức này ta dùng phương pháp biểu diễn định thức thành tích các định thức. Với $n \geq 2$ ta có:

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_1-\beta_1) & \cos(\alpha_1-\beta_2) & \dots & \cos(\alpha_1-\beta_n) \\ \cos(\alpha_2-\beta_1) & \cos(\alpha_2-\beta_2) & \dots & \cos(\alpha_2-\beta_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos(\alpha_n-\beta_1) & \cos(\alpha_n-\beta_2) & \dots & \cos(\alpha_n-\beta_n) \end{bmatrix}$$
$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ \cos\alpha_2 & \sin\alpha_2 & 0 & \dots & 0 \\ \cos\alpha_3 & \sin\alpha_3 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos\alpha_n & \sin\alpha_n & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \dots & \cos\beta_n \\ \sin\beta_1 & \sin\beta_2 & \dots & \sin\beta_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{C}$$

Bởi vậy ta có:

$$D = detA = det(BC) = detB.detC = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad n > 2 \\ \sin(\alpha_2-\alpha_1).\sin(\beta_2-\alpha_1) & \text{nếu} \quad n = 2 \end{cases}$$

11. **Tính định thức cấp 2n**

$$D_{2n} = \left|\begin{matrix}
a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b \\
0 & a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & a & 0 & 0 & b & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & a & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & b & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & b & 0 & 0 & a & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & b & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & 0 \\
b & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a
\end{matrix}\right|_{2n\times 2n}
\qquad
\begin{matrix}
(1) \\ (2) \\ \\ (n-1) \\ (n) \\ (n+1) \\ (n+2) \\ \\ (2n-1) \\ (2n)
\end{matrix}$$

Giải :

Xét khi $a \neq 0$

- Nhân dòng (1) với $-\dfrac{b}{a}$ cộng vào dòng (2n)
- Nhân dòng (2) với $-\dfrac{b}{a}$ cộng vào dòng (2n-1)

....

- Nhân dòng (n) với $-\dfrac{b}{a}$ cộng vào dòng (n+1)

Ta có :

$$D_{2n} = \left|\begin{matrix}
a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b \\
0 & a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & a & 0 & 0 & b & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & a & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dfrac{a^2-b^2}{a} & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & b & 0 & 0 & \dfrac{a^2-b^2}{a} & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dfrac{a^2-b^2}{a} & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dfrac{a^2-b^2}{a}
\end{matrix}\right| = (a^2 - b^2)^n$$

Khi $a \neq 0$, do tính liên tục của định thức công thức trên vẫn đúng. Vậy ta có: $D_{2n} = (a^2 - b^2)^n$

Chú ý : Khai triển định thức theo dòng (1), sau đó khai triển các định thức cấp $(2n-1)$ vừa nhận được theo dòng $(2n-1)$. Ta sẽ có công thức truy hồi:

$$D_{2n} = (a^2 - b^2)D_{2(n-1)}$$

Do công thức trên đúng với mọi $n \geq 2$ nên :

$$D_{2n} = (a^2-b^2)D_{2(n-1)} = (a^2-b^2)^2 D_{2(n-2)} = \ldots = (a^2-b^2)^{n-1} D_2 = (a^2-b^2)^n$$

(*Chi tiết của cách làm này xin dành cho bạn đọc*).

12. **Tính định thức cấp 2n**

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & \ldots & 0 & \vdots & b_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & \ldots & 0 & \vdots & 0 & b_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_n & \vdots & 0 & 0 & \ldots & b_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_1 & 0 & \ldots & 0 & \vdots & d_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & c_2 & \ldots & 0 & \vdots & 0 & d_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & c_n & \vdots & 0 & 0 & \ldots & d_n \end{vmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ \\ (n) \\ \\ (n+1) \\ (n+2) \\ \\ (2n) \end{matrix}$$

Xét khi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ đều khác 0 :
- Nhân dòng (1) với $-\dfrac{c_1}{a_1}$ rồi cộng vào dòng $(n+1)$
- Nhân dòng (2) với $-\dfrac{c_2}{a_2}$ rồi cộng vào dòng $(n+2)$
....
- Nhân dòng (n) với $-\dfrac{c_n}{a_n}$ rồi cộng vào dòng $(2n)$

Ta có :

$$D_{2n} = \left| \begin{array}{cccccccccc} a_1 & 0 & \dots & 0 & \vdots & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 & \vdots & 0 & b_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n & \vdots & 0 & 0 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots & \dfrac{a_1d_1 - b_1c_1}{a_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots & 0 & \dfrac{a_2d_2 - b_2c_2}{a_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots & 0 & 0 & \dots & \dfrac{a_nd_n - b_nc_n}{a_n} \end{array} \right|$$

$$= (a_1d_1 - b_1c_1)\dots(a_nd_n - b_nc_n) = \prod_{i=1}^{n}(a_id_i - b_ic_i)$$

Khi các $a_1, a_2, \dots, a_n$ bằng 0, do tính liên tục của định thức công thức trên vẫn đúng.
Vậy ta có :

$$D_{2n} = \prod_{i=1}^{n}(a_id_i - b_ic_i)$$

Chú ý : Khai triển định thức theo dòng thứ n, sau đó khai triển các định thức cấp $2n-1$ vừa nhận được theo dòng $(2n-1)$ ta sẽ có công thức truy hồi:

$$D_{2n} = (a_nd_n - b_nc_n)D_{2(n-1)} \quad \forall n \geq 2$$

Do đó, ta có:

$$\begin{aligned} D_{2n} &= (a_nd_n - b_nc_n)D_{2(n-1)} = (a_nd_n - b_nc_n)(a_{n-1}d_{n-1} - b_{n-1}c_{n-1})D_{2(n-2)} \\ &= \dots = (a_nd_n - b_nc_n)\dots(a_2d_2 - b_2c_2)D_1 \\ &= \prod_{i=1}^{n}(a_id_i - b_ic_i) \end{aligned}$$

(*Chi tiết của cách này xin dành cho bạn đọc*)
[1]

[1]Người đánh máy : Nguyễn Ngọc Quyên