

# ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Tài liệu ôn thi cao học năm 2005

Phiên bản đã chỉnh sửa

PGS TS My Vinh Quang

Ngày 15 tháng 11 năm 2004

## Hạng Của Ma Trận

Cùng với định thức, ma trận (đặc biệt là hạng của ma trận) là các công cụ cơ bản để giải quyết các bài toán về hệ phương trình tuyến tính nói riêng và đại số tuyến tính nói chung. Bài viết này sẽ giới thiệu định nghĩa, các tính chất cơ bản của hạng ma trận, và hai phương pháp cơ bản để tính hạng của ma trận.

### 1 Định nghĩa và các tính chất cơ bản

Trước hết, cần nhớ lại khái niệm định thức con cấp  $k$  của một ma trận. Cho  $A$  là ma trận cấp  $m \times n$ ;  $k$  là số tự nhiên  $1 \leq k \leq \min\{m, n\}$ . Chọn ra  $k$  dòng,  $k$  cột bất kỳ của  $A$ . Các phần tử thuộc giao của  $k$  dòng,  $k$  cột này tạo thành ma trận vuông cấp  $k$ , gọi là ma trận con cấp  $k$  của ma trận  $A$ . Định thức của ma trận con cấp  $k$  này gọi là một định thức con cấp  $k$  của  $A$ .

#### 1.1 Định nghĩa hạng của ma trận

Cho  $A$  là ma trận cấp  $m \times n$  khác không.

Hạng của ma trận  $A$  là số tự nhiên  $r$ ,  $1 \leq r \leq \min\{m, n\}$  thỏa mãn các điều kiện sau:

1. Tồn tại ít nhất một định thức con cấp  $r$  của ma trận  $A$  khác 0.
2. Mọi định thức con cấp lớn hơn  $r$  (nếu có) của ma trận  $A$  đều bằng 0.

Nói cách khác, hạng của ma trận  $A \neq O$  chính là *cấp cao nhất của các định thức con khác không* của ma trận  $A$ .

Hạng của ma trận  $A$  ký hiệu là  $r(A)$  hoặc  $\text{rank}(A)$ .

Qui ước: hạng của ma trận không  $O$  là 0.

#### 1.2 Các tính chất cơ bản về hạng của ma trận

##### 1.2.1 Tính chất 1

Hạng của ma trận không thay đổi qua phép chuyển vị, tức là  $\text{rank } A^t = \text{rank } A$ .

### 1.2.2 Tính chất 2

Nếu  $A$  là ma trận vuông cấp  $n$  thì

$$\text{rank } A = n \iff \det A \neq 0$$

$$\text{rank } A < n \iff \det A = 0$$

Nếu xảy ra trường hợp đầu, ta nói  $A$  là *ma trận vuông không suy biến*. Nếu xảy ra trường hợp thứ hai, ta nói  $A$  là *ma trận vuông suy biến*.

### 1.2.3 Tính chất 3

Nếu  $A, B$  là các ma trận cùng cấp thì

$$\text{rank}(A + B) \leq \text{rank } A + \text{rank } B$$

### 1.2.4 Tính chất 4

Cho  $A, B$  là các ma trận sao cho tồn tại tích  $AB$ . Khi đó

1.  $\text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank } A, \text{rank } B\}$
2. Nếu  $A$  là ma trận vuông không suy biến thì  $\text{rank}(AB) = \text{rank } B$ .

## 2 Tìm hạng của ma trận bằng phương pháp định thức

**2.1** Từ định nghĩa hạng của ma trận ta có thể suy ra ngay thuật toán sau đây để tìm hạng của ma trận  $A$  cấp  $m \times n$  ( $A \neq O$ )

#### Bước 1

Tìm một định thức con cấp  $k$  khác 0 của  $A$ . Số  $k$  càng lớn càng tốt. Giả sử định thức con cấp  $k$  khác không là  $D_k$ .

#### Bước 2

Xét tất cả các định thức con cấp  $k + 1$  của  $A$  chứa định thức  $D_k$ . Xảy ra 3 khả năng sau

1. Không có một định thức con cấp  $k + 1$  nào của  $A$ . Khả năng này xảy ra khi và chỉ khi  $k = \min\{m, n\}$ . Khi đó  $\text{rank } A = k = \min\{m, n\}$ . Thuật toán kết thúc.
2. Tất cả các định thức con cấp  $k + 1$  của  $A$  chứa định thức con  $D_k$  đều bằng 0. Khi đó  $\text{rank } A = k$ . Thuật toán kết thúc.
3. Tồn tại một định thức con cấp  $k + 1$  của  $A$  là  $D_{k+1}$  chứa định thức con  $D_k$  khác 0. Khi đó lặp lại bước 2 với  $D_{k+1}$  thay cho  $D_k$ . Và cứ tiếp tục như vậy cho đến khi xảy ra trường hợp (1) hoặc (2) thì thuật toán kết thúc.

## 2.2 Ví dụ

Tìm hạng của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

*Giải*

Đầu tiên ta thấy  $A$  có định thức con cấp 2,  $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$  (Định thức này được tạo thành bởi 2 dòng đầu, 2 cột đầu của  $A$ )

Xét các định thức con cấp 3 của  $A$  chứa  $D_2$ , ta thấy có định thức con cấp 3 khác 0. Đó là định thức

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

(Định thức này được thành bởi các dòng 1, 2, 3, các cột 1, 2, 4 của  $A$ )

Tiếp tục, xét các định thức con cấp 4 của  $A$  chứa  $D_3$ . Có tất cả 2 định thức như vậy, đó là

$$D_{4,1} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

và

$$D_{4,2} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Cả 2 định thức này đều bằng 0. Do đó  $\text{rank } A = 3$ .

**Chú ý.** Có thể nhận xét dòng (4) của ma trận  $A$  là tổ hợp tuyến tính của dòng (1) và dòng (2); dòng (4) = dòng (1) - dòng (2), nên dễ dàng thấy được  $D_{4,1} = 0$ ,  $D_{4,2} = 0$ .

Việc tìm hạng của ma trận bằng định thức như trên phải tính toán khá phức tạp nên trong thực tế người ta ít sử dụng mà người ta thường sử dụng phương pháp tìm hạng của ma trận bằng các phép biến đổi sơ cấp sau đây.

## 3 Tìm hạng của ma trận bằng phương pháp sử dụng các phép biến đổi sơ cấp (phương pháp Gauss)

Trước khi giới thiệu phương pháp này, ta cần nhớ lại một số khái niệm sau

### 3.1 Ma trận bậc thang

#### 3.1.1 Định nghĩa

Ma trận  $A$  cấp  $m \times n$  khác không gọi là một ma trận bậc thang nếu tồn tại số tự nhiên  $r$ ,  $1 \leq r \leq \min\{m, n\}$  thỏa các điều kiện sau:

1.  $r$  dòng đầu của  $A$  khác không. Các dòng từ thứ  $r + 1$  trở đi (nếu có) đều bằng 0.
2. Xét dòng thứ  $k$  với  $1 \leq k \leq r$ . Nếu  $(A)_{ki_k}$  là phần tử đầu tiên bên trái (tính từ trái sang phải) khác 0 của dòng  $k$  thì ta phải có  $i_1 < i_2 < \dots < i_r$ .

Các phần tử  $(A)_{ki_k}$  gọi là các phần tử *được đánh dấu* của ma trận  $A$ . Các cột chứa các phần tử được đánh dấu (các cột  $i_1, i_2, \dots, i_r$ ) gọi là *cột đánh dấu* của ma trận  $A$ . Như vậy, điều kiện (2) có thể phát biểu lại như sau: *Nếu đi từ dòng trên xuống dưới thì các phần tử đánh dấu phải lùi dần về phía phải*. Và như vậy, ma trận bậc thang có dạng như sau:

$$A = \begin{array}{cccccc} & i_1 & i_2 & & i_r & \\ \left[ \begin{array}{cccccc} 0 \dots 0 & (A)_{1i_1}^* & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 \dots 0 & 0 \dots 0 & (A)_{2i_2}^* & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & (A)_{ri_r}^* & \dots \\ 0 \dots 0 & 0 \dots 0 & 0 \dots & \dots & 0 \dots & \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 \dots 0 & 0 \dots 0 & 0 \dots & \dots & 0 \dots & \dots 0 \end{array} \right. & \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ \\ (r) \\ (r+1) \\ \\ (m) \end{array} \end{array}$$

Ta có nhận xét quan trọng sau:

*Nếu  $A$  là ma trận bậc thang thì số  $r$  trong định nghĩa chính là rank  $A$ .*

Thật vậy, có thể chỉ ra một định thức con cấp  $r$  của  $A$  khác 0 chính là định thức  $D_r$  tạo bởi  $r$  dòng đầu và  $r$  cột đánh dấu  $i_1, i_2, \dots, i_r$ .

$$D_r = \begin{vmatrix} (A)_{1i_1} & \dots & \dots & \dots \\ 0 & (A)_{2i_2} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (A)_{ri_r} \end{vmatrix} = (A)_{1i_1} (A)_{2i_2} \dots (A)_{ri_r} \neq 0$$

Ngoài ra, các định thức con cấp  $r + 1$  của  $A$  đều tạo bởi  $r + 1$  dòng nào đó nên có ít nhất một dòng bằng không. Do đó, chúng đều bằng 0.

### 3.1.2 Ví dụ về các ma trận bậc thang

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1^* & 2 & 0 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3^* & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2^* & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1^* & 2 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4^* & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5^* \end{pmatrix}$$

Các ma trận  $A, B$  đều là các ma trận bậc thang, và ta có rank  $A = 4$  (bằng số dòng khác không của  $A$ ), rank  $B = 5$  (bằng số dòng khác không của  $B$ ).

## 3.2 Phép biến đổi sơ cấp trên ma trận

Ba phép biến đổi sau gọi là phép biến đổi sơ cấp trên các dòng của ma trận:

1. Đổi chỗ 2 dòng cho nhau.
2. Nhân một dòng cho một số khác 0.
3. Nhân một dòng cho một số bất kỳ rồi cộng vào dòng khác.

Tương tự, bằng cách thay dòng thành cột, ta có 3 phép biến đổi sơ cấp trên các cột của ma trận.

## 3.3 Tìm hạng của ma trận bằng phương pháp sử dụng các phép biến đổi sơ cấp

Nội dung của phương pháp này dựa trên hai nhận xét khá đơn giản sau

1. Các phép biến đổi sơ cấp không làm thay đổi hạng của ma trận.
2. Một ma trận khác  $O$  bất kỳ đều có thể đưa về dạng bậc thang sau một số hữu hạn các phép biến đổi sơ cấp trên dòng.

Như vậy, muốn tìm hạng của ma trận  $A$ , ta dùng các phép biến đổi sơ cấp để đưa  $A$  về dạng bậc thang, do nhận xét (1), hạng của  $A$  bằng hạng của ma trận bậc thang, và ta đã biết hạng của ma trận bậc thang chính bằng số dòng khác không của nó.

Cần lưu ý bạn đọc rằng: kỹ năng đưa một ma trận về dạng bậc thang bằng các phép biến đổi sơ cấp là một kỹ năng cơ bản, nó cần thiết không chỉ trong việc tìm hạng của ma trận mà còn cần để giải nhiều bài toán khác của Đại số tuyến tính.

Sau đây, chúng tôi xin đưa ra một thuật toán để đưa một ma trận về dạng bậc thang bằng các phép biến đổi sơ cấp:

Xét ma trận

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

### 3.3.1 Bước 1

Bằng cách đổi chỗ 2 dòng cho nhau (nếu cần), ta luôn có thể giả sử  $a_{11} \neq 0$ .

Nhân dòng (1) với  $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ , cộng vào dòng (2),

Nhân dòng (1) với  $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$ , cộng vào dòng (3),

$\vdots$   
Nhân dòng (1) với  $-\frac{a_{n1}}{a_{11}}$ , cộng vào dòng ( $n$ ).

Ta nhận được ma trận

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & \cdots & b_{2n} \\ 0 & b_{32} & \cdots & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{m2} & \cdots & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

**Chú ý.** Nếu toàn bộ cột 1 bằng 0 ( $a_{11} = 0, a_{21} = 0, \dots, a_{n1} = 0$ ) thì ta có thể bỏ qua cột 1 mà thực hiện bước 1 với cột kế tiếp.

### 3.3.2 Bước 2

Xét ma trận

$$B = \begin{pmatrix} b_{22} & \cdots & \cdots & b_{2n} \\ b_{32} & \cdots & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m2} & \cdots & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

Nếu  $B = O$  hoặc  $B$  có dạng bậc thang thì  $A_1$  là ma trận bậc thang, thuật toán kết thúc.

Trong trường hợp ngược lại, tiếp tục lặp lại bước 1 cho ma trận  $B$ .

Cần chú ý rằng ma trận  $B$  có ít hơn ma trận  $A$  1 dòng và 1 cột. Do đó, sau một số hữu hạn bước lặp,  $B$  sẽ là ma trận không hoặc ma trận bậc thang. Khi đó, thuật toán sẽ kết thúc.

## 3.4 Ví dụ

### 3.4.1 Ví dụ 1

Tìm hạng của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & -3 & 4 & 5 & 2 \\ -3 & 5 & -2 & -3 & -4 \\ -2 & 3 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

*Giải*

$$A \xrightarrow{d_1 \leftrightarrow d_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ -3 & 5 & -2 & -3 & -4 \\ -2 & 3 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} d_3 \rightarrow 3d_1 + d_3 \\ d_4 \rightarrow 2d_1 + d_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & -4 & 10 & 12 & 2 \\ 0 & -3 & 13 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} d_3 \leftrightarrow 4d_2 + d_3 \\ d_4 \rightarrow 3d_2 + d_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 22 & 28 & 26 \\ 0 & 0 & 22 & 28 & 26 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} d_4 \rightarrow -d_1 + d_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 22 & 28 & 26 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vậy  $\text{rank } A = 3$

### 3.4.2 Ví dụ 2

Tìm hạng của ma trận vuông cấp  $n$

$$B = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{pmatrix}$$

*Giải*

$$B \xrightarrow{c_1 \rightarrow c_1 + c_2 + \cdots + c_n} \begin{pmatrix} a+n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a+n-1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a+n-1 & 1 & a & \cdots & a \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{d_2 = d_2 - d_1 \\ d_3 = d_3 - d_1 \\ \dots \\ d_n = d_n - d_1}} \begin{pmatrix} a+n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-1 \end{pmatrix} = C$$

Xây ra 3 trường hợp sau:

1.  $a \neq 1 - n$ ,  $a \neq 1$ , khi đó ma trận  $C$  là ma trận bậc thang và  $\text{rank } B = \text{rank } C = n$
2.  $a = 1$ , khi đó ma trận  $C$  là ma trận bậc thang và  $\text{rank } B = \text{rank } C = 1$
3.  $a = 1 - n$ , khi đó

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -n & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -n \end{pmatrix}$$

Do đó,  $C$  không là ma trận bậc thang nhưng có định thức con cấp  $n - 1$  khác không, đó là định thức con tạo bởi  $n - 1$  dòng cuối,  $n - 1$  cột cuối

$$D_{n-1} = \begin{vmatrix} -n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -n \end{vmatrix} = (-n)^{n-1} \neq 0$$

và  $\det C = 0$

Do đó,  $\text{rank } C = n - 1$  Bởi vậy,  $\text{rank } B = n - 1$ .

# BÀI TẬP

Tìm hạng của các ma trận sau

$$13. \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

$$14. \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 5 & 0 & 7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$15. \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 & 3 & 4 \\ 5 & 5 & 6 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$16. \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$17. \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ a & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$18. \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ a & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tìm hạng của các ma trận vuông cấp  $n$

$$19. \begin{pmatrix} 1+a & a & \cdots & a \\ a & 1+a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & a \\ a & a & \cdots & 1+a \end{pmatrix}$$

$$20. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & x & \cdots & x \\ 1 & x & 0 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x & x & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$



21. 
$$\begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{pmatrix}$$