ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH
GIẢI BÀI TẬP HẠNG CỦA MA TRẬN

Phiên bản đã chỉnh sửa

PGS TS Mỵ Vinh Quang

Ngày 3 tháng 12 năm 2004

13) Tìm hạng của ma trận:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{bmatrix}$$

<u>Giải</u>:

$$\mathbf{A} \xrightarrow[\substack{d3 \to -d1+d3 \\ d4 \to (-2)d1+d4}]{d2 \to (-2)d1+d2} \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & -12 \end{bmatrix} \xrightarrow[d4 \to (-3)d2+d4]{d3 \to -d2+d3} \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vậy rank $\mathbf{A} = 3$.

14) Tìm hạng của ma trận:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 5 & 0 & 7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>Giải</u>:

$$\mathbf{A} \xrightarrow{\text{đổi dòng}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & 0 & 7 \\ 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{d3 \to -5d1+d3 \\ d4 \to -2d1+d4}]{\text{d2}\to \text{ - 3d1 + d2}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 8 & -12 & 2 & -16 \\ 0 & 12 & -23 & 3 & -31 \\ 0 & 16 & -34 & 4 & -48 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[d4 \to -7d1+d4]{\text{d3}\to \frac{-3}{2}\text{d2 + d3}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 8 & -12 & 2 & -16 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & -10 & 0 & -16 \end{bmatrix} \xrightarrow{d4 \to -2d3+d4} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 8 & -12 & 2 & -16 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & -7 \\ 0 & 16 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Vậy rank $\mathbf{A} = 4$.

15) Tìm hạng của ma trận:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 & 3 & 4 \\ 5 & 5 & 6 & 7 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

<u>Giải</u>

$$\mathbf{A} \xrightarrow{d1 \leftrightarrow d2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 4 & 3 & 4 \\ 5 & 5 & 6 & 7 & 5 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{d3 \to -3d1+d3 \\ d4 \to -5d1+d4}]{d2 \to -2d1+d2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 1 & -3 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{d2 \leftrightarrow -\frac{1}{3}d2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 1 & -3 & 0 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow[d4 \to 5d2+d4]{d3 \to 2d2+d3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{d3 \leftrightarrow d4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vậy rank $\mathbf{A} = 3$.

16) Tìm hạng của ma trận:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>Giải:</u>

$$\mathbf{A} \xrightarrow{\text{đổi dòng}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{d4 \to -d1+d4 \\ d5 \to -d1+d5 \\ d6 \to -d1+d6}]{\substack{d2 \to -2d1+d2 \\ d3 \to -d1+d4}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[d6 \to d2+d6]{d3 \to 2d2+d3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{d3 \leftrightarrow d6} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[d6\to 2d3+d6]{d4\to -3d3+d4}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&-1&-1&-1\\0&0&1&2\\0&0&0&-6\\0&0&0&4\\0&0&0&2\end{bmatrix}\xrightarrow[d6\to \frac{1}{3}d4+d6]{d5\to \frac{2}{3}d4+d5}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&-1&-1&-1\\0&0&1&2\\0&0&0&-6\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

Vậy rank $\mathbf{A} = 4$.

17) Tìm hạng của ma trận :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}3&1&1&4\\a&4&10&1\\1&7&17&3\\2&2&4&3\end{bmatrix}$$

<u>Giải</u>:

$$\mathbf{A}\xrightarrow{\text{đổi cột}}\begin{bmatrix}1&1&4&3\\4&10&1&a\\7&17&3&1\\2&4&3&2\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{d3\to -7d1+d3\\ d4\to -2d1+d4}]{d2\to -4d1+d2}\begin{bmatrix}1&1&4&3\\0&6&0&a-12\\0&10&-25&-20\\0&2&-5&-4\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{đổi dòng}}\begin{bmatrix}1&1&4&3\\0&2&-5&-4\\0&6&0&a-12\\0&10&-15&-20\end{bmatrix}\xrightarrow[d4\to -5d2+d4]{d3\to -3d2+d3}\begin{bmatrix}1&1&4&3\\0&2&-5&-4\\0&0&15&a\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

Vậy rank $\mathbf{A} = 3$. Với mọi a.

18) Tìm hạng của ma trận:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}-1&2&1&-1&1\\a&-1&1&-1&-1\\1&a&0&1&1\\1&2&2&-1&1\end{bmatrix}$$

<u>Giải</u>:

$$\mathbf{A}\xrightarrow{\text{đổi cột}}\begin{bmatrix}1&-1&1&-1&2\\-1&-1&1&a&-1\\1&1&0&1&a\\1&-1&2&1&2\end{bmatrix}\xrightarrow[d4\to -d1+d4]{\substack{d2\to d1+d2\\ d3\to -d1+d3}}\begin{bmatrix}1&-1&1&-1&2\\0&-2&2&a-1&1\\0&2&-1&2&a-2\\0&0&1&2&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{d3\to d2+d3}\begin{bmatrix}1&-1&1&-1&2\\0&-2&2&a-1&1\\0&0&1&a+1&a-1\\0&0&1&2&0\end{bmatrix}\xrightarrow{d4\to -d3+d4}\begin{bmatrix}1&-1&1&-1&2\\0&-2&2&a-1&1\\0&0&1&a+1&a-1\\0&0&0&a-1&1-a\end{bmatrix}$$

Vậy : nếu $a \neq 1$ thì rank $\mathbf{A} = 4$.

. nếu $a = 1$ thì rank $\mathbf{A} = 3$.

19) Tìm hạng của ma trận:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1+a & a & \dots & a \\ a & 1+a & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & \dots & 1+a \end{bmatrix}$$

Giải:

$$\mathbf{A} \xrightarrow{c1 \to c1+c2+\dots+cn} \begin{bmatrix} 1+na & a & \dots & a \\ 1+na & 1+a & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+na & a & \dots & 1+a \end{bmatrix} \xrightarrow[dn \to -d1+dn]{d2 \to -d1+d2} \begin{bmatrix} 1+na & a & \dots & a \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Nếu $a \neq -\dfrac{1}{n}$. Khi đó $1+na \neq 0$ và rank $\mathbf{A} = n$.

Nếu $a = -\dfrac{1}{n}$. Khi đó $1+na = 0$ và rank $\mathbf{A} = n-1$ vì có định thức con cấp $n-1$ gồm $n-1$ dòng cuối, cột cuối .

$$\mathbf{D}_{n-1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Còn định thức cấp n bằng 0 .

20) Tìm hạng của ma trận ($n \geq 2$)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & x & \dots & x \\ 1 & x & 0 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x & x & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Giải:

Nếu $x \neq 0$:

$$\mathbf{A} \xrightarrow[d1 \to xd1]{c1 \to xc1} \begin{bmatrix} 0 & x & x & \dots & x \\ x & 0 & x & \dots & x \\ x & x & 0 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{c1 \to c1+c2+\dots+cn} \begin{bmatrix} (n-1)x & x & x & \dots & x \\ (n-1)x & 0 & x & \dots & x \\ (n-1)x & x & 0 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (n-1)x & x & x & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{d3 \to -d1+d3 \\ dn \to -d1+dn}]{d2 \to -d1+d2} \begin{bmatrix} (n-1)x & x & x & \dots & x \\ 0 & -x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x \end{bmatrix}$$

Vậy rank $\mathbf{A} = n$

Nếu $x = 0$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[dn \to -d2+dn]{\substack{d3 \to -d2+d3 \\ \dots\dots\dots\dots}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$rank\mathbf{A} = 2$.
Vậy

$$rank\mathbf{A} = n \text{ nếu } x \neq 0$$

$$rank\mathbf{A} = 2 \text{ nếu } x = 0$$

21) Tìm hạng của ma trận vuông cấp n:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & a \end{bmatrix}$$

Giải:

$$\mathbf{A} \xrightarrow{c1 \to c1+c2+\dots+cn} \begin{bmatrix} a+(n-1)b & b & b & \dots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a+(n-1)b & b & b & \dots & a \end{bmatrix} \xrightarrow[dn \to -d1+dn]{\substack{d2 \to -d1+d2 \\ d3 \to -d1+d3 \\ \dots\dots\dots\dots}} \begin{bmatrix} a+(n-1)b & b & b & \dots & b \\ 0 & a-b & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

1. Nếu $a \neq (1-n)b, a \neq b$ thì $rank\mathbf{A} = n$
2. $a = b \neq 0$ thì $rank\mathbf{A} = 1$
   $a = b = 0$ thì $rank\mathbf{A} = 0$
3. $a = (n-1)b = 0$ thì $rank\mathbf{A} = n-1$
   Vì có định thức con cấp $n-1$ (bỏ dòng đầu, cột đầu)

$$\begin{vmatrix} a-b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a-b & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a-b \end{vmatrix} = (a-b)^{n-1} \neq 0$$

   Còn định thức cấp n bằng 0.