GIẢI TÍCH (CƠ SỞ)

Chuyên ngành: **Giải Tích**, **PPDH Toán**

Phần 1. **Không gian metric**

§3. **Ánh xạ liên tục**

(Phiên bản đã chỉnh sửa)

PGS TS Nguyễn Bích Huy

Ngày 20 tháng 12 năm 2004

Tóm tắt lý thuyết

1 Định nghĩa

Cho các không gian metric (X, d), (Y, ρ) và ánh xạ $f : X \to Y$

- Ta nói ánh xạ f liên tục tại điểm $x_0 \in X$ nếu
  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in X, d(x, x_0) < \delta \Longrightarrow \rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$
- Ta nói f liên tục trên X nếu f liên tục tại mọi $x \in X$

2 Các tính chất

Cho các không gian metric (X, d), (Y, ρ) và ánh xạ $f : X \to Y$.

Định lí 1. *Các mệnh đề sau tương đương*

1. *f liên tục tại $x_0 \in X$*
2. $\forall \{x_n\} \subset X \quad (\lim x_n = x_0) \Longrightarrow \lim f(x_n) = f(x_0)$

Hệ quả. *Nếu ánh xạ $f : X \to Y$ liên tục tại x_0 và ánh xạ $g : Y \to Z$ liên tục tại $y_0 = f(x_0)$ thì ánh xạ hợp $g \circ f : X \to Z$ liên tục tại x_0.*

Định lí 2. *Các mệnh đề sau tương đương*

1. *f liên tục trên X*
2. *Với mọi tập mở $G \subset Y$ thì tập nghịch ảnh $f^{-1}(G)$ là tập mở trong X.*
3. *Với mọi tập đóng $F \subset Y$ thì tập $f^{-1}(F)$ là tập mở trong X.*

3 Ánh xạ mở, ánh xạ đóng, ánh xạ đồng phôi

Cho các không gian metric X, Y và ánh xạ $f : X \to Y$.

- Ánh xạ f gọi là ánh xạ mở (đóng) nếu với mọi tập mở (đóng) $A \subset X$ thì ảnh $f(A)$ là tập mở (đóng).
- Ánh xạ f gọi là ánh xạ đồng phôi nếu f là song ánh liên tục và ánh xạ ngược $f^{-1} : Y \to X$ liên tục.

4 Một số các hệ thức về ảnh và ảnh ngược

Cho các tập X, Y khác trống và ánh xạ $f : X \to Y$. Với các tập $A, A_i \subset X$ và $B, B_i \subset Y$, ta có

1. $f(\bigcup\limits_{i\in I} A_i) = \bigcup\limits_{i\in I} f(A_i), \qquad f(\bigcap\limits_{i\in I} A_i) \subset \bigcap\limits_{i\in I} f(A_i)$
2. $f^{-1}(\bigcup\limits_{i\in I} B_i) = \bigcup\limits_{i\in I} f^{-1}(B_i), \qquad f^{-1}(\bigcap\limits_{i\in I} B_i) = \bigcup\limits_{i\in I} f^{-1}(B_i)$

   $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$
3. $f(f^{-1}(B)) \subset B$ ("=" nếu f là toàn ánh)

   $f^{-1}(f(A)) \supset A$ ("=" nếu f là đơn ánh)

Bài tập

Bài 1. Trong không gian $C_{[a,b]}$, ta xét metric $d(x, y) = \sup\limits_{a\leq t\leq b} |x(t) - y(t)|$ và trong $\mathbb{R}$ ta xét metric thông thường. Chứng minh các ánh xạ sau đây liên tục từ $C_{[a,b]}$ vào $\mathbb{R}$.

1. $f_1(x) = \inf\limits_{a \le t \le b} x(t)$

2. $f_2(x) = \int\limits_a^b x^2(t)dt$

Giải. 1. Ta sẽ chứng minh $|f_1(x) - f_1(y)| \le d(x, y) \qquad (*)$

Thật vậy

$$
\begin{aligned}
&\quad f_1(x) \le x(t) = y(t) + (x(t) - y(t)) \le y(t) + d(x,y) \qquad \forall t \in [a,b]\\
&\Longrightarrow f_1(x) - d(x,y) \le y(t), \qquad \forall t \in [a,b]\\
&\Longrightarrow f_1(x) - d(x,y) \le f_1(y) \quad \text{hay} \quad f_1(x) - f_1(y) \le d(x,y)
\end{aligned}
$$

Tương tự, ta có $f_1(y) - f_1(x) \le d(x, y)$ nên (*) đúng. Từ đây, ta thấy

$\forall \{x_n\}, \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f_1(x_n) = f_1(x)$

2. Xét tùy ý $x \in C_{[a,b]}$, $\{x_n\} \subset C_{[a,b]}$ mà $\lim x_n = x$, ta cần chứng minh $\lim f_2(x_n) = f_2(x)$

Ta có

$$
\begin{aligned}
|x_n^2(t) - x^2(t)| &= |x_n(t) - x(t)|.|x_n(t) - x(t) + 2x(t)|\\
&\le d(x_n, x).[d(x_n, x) + M] \qquad (M = \sup_{a\le t\le b} 2|x(t)|)\\
\Longrightarrow |f_2(x_n) - f_2(x)| &\le \int_a^b |x_n^2(t) - x^2(t)|dt\\
&\le d(x_n, x)[d(x_n, x) + M](b - a)
\end{aligned}
$$

Do $\lim d(x_n, x) = 0$ nên từ đây ta có $\lim f_2(x_n) = f_2(x)$ (đpcm)

Ghi chú. Ta có thể dùng các kết quả về ánh xạ liên tục để giải bài tập 3 (§2). Ví dụ, để chứng minh tập

$$M = \{x \in C_{[a,b]} : x(t) > x_0(t), \quad \forall t \in [a, b]\} \qquad (x_0 \in C_{[a,b]} \text{ cho trước })$$

là tập mở, ta có thể làm như sau. Xét ánh xạ

$$f : C_{[a,b]} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \inf_{a\le t\le b}(x(t) - x_0(t))$$

Ta có:

- f liên tục (lý luận như khi chứng minh f_1 liên tục)

- $M = \{x \in C_{[a,b]} : f(x) > 0\} = f^{-1}((0, +\infty))$, $(0, \infty)$ là tập mở trong $\mathbb{R}$

Bài 2. Cho các không gian metric X, Y và ánh xạ $f : X \to Y$. Các mệnh đề sau là tương đương

1. f liên tục trên X
2. $f^{-1}(\overline{B}) \supset \overline{f^{-1}(B)} \qquad \forall B \subset Y$
3. $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} \qquad \forall A \subset X$

Giải. **1) $\Rightarrow$ 2)** Ta có

$$\begin{cases} f^{-1}(\overline{B}) \text{ là tập đóng (do } f \text{ liên tục và } \overline{B} \subset Y \text{ là tập đóng)} \\ f^{-1}(\overline{B}) \supset f^{-1}(B) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow f^{-1}(\overline{B}) \supset \overline{f^{-1}(B)} \qquad \text{(do tính chất "nhỏ nhất" của bao đóng)}$$

2) $\Rightarrow$ 3) Đặt $B = f(A)$ trong 2), ta có $f^{-1}(\overline{f(A)}\,) \supset \overline{f^{-1}(f(A))} \supset \overline{A}$

Do đó $f(f^{-1}(\overline{f(A)}\,)) \supset f(\overline{A}) \Longrightarrow \overline{f(A)} \supset f(\overline{A})$

3) $\Rightarrow$ 1) Xét tùy ý tập đóng $F \subset Y$, ta cần chứng minh $f^{-1}(F)$ là tập đóng.

Đặt $A = f^{-1}(F)$, ta có

$$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} = \overline{f(f^{-1}(F))} \subset \overline{F} = F \qquad \text{(do } F \text{ đóng)}$$

$\Longrightarrow f^{-1}(f(\overline{A})) \subset f^{-1}(F)$

$\Longrightarrow \overline{A} \subset A$

Vậy $\overline{A} = A$ nên A là tập đóng.

Bài 3. Trong $C_{[a,b]}$ ta xét metric $d(x, y) = sup\{|x(t) - y(t)|, a \le t \le b\}$. Cho $\varphi : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục. Chứng minh ánh xạ sau đây liên tục

$$F : C_{[a,b]} \to C_{[a,b]}, \qquad F(x)(t) = \varphi(t, x(t))$$

Giải. Cố định $x_0 \in C_{[a,b]}$, ta sẽ chứng minh F liên tục tại x_0.

Đặt $M = 1 + \sup\limits_{a \le t \le b} |x_0(t)|$. Cho $\varepsilon > 0$ tùy ý.

Hàm φ liên tục trên tập compact $D := [a, b] \times [-M, M]$ nên liên tục đều trên D. Do đó, tồn tại số $\delta_1 > 0$ sao cho

$$\forall (t, s), (t', s') \in D, |t - t'| < \delta_1, |s - s'| < \delta_1 \Longrightarrow |\varphi(t, s) - \varphi(t', s')| < \varepsilon$$

Đặt $\delta = \min(\delta_1, 1)$. Với mỗi $x \in C_{[a,b]}$, $d(x, x_0) < \delta$, ta có

$|x(t) - x_0(t)| < \delta \quad \forall t \in [a, b]$

$x(t) \in [-M, M] \qquad$ (do $|x(t) - x_0(t)| < 1$, $\forall t \in [a, b]$)

Do đó, $|\varphi(t, x(t)) - \varphi(t, x_0(t))| < \varepsilon, \quad \forall t \in [a, b]$

$\Longrightarrow |F(x)(t) - F(x_0)(t)| < \varepsilon, \quad \forall t \in [a, b]$

$\Longrightarrow d(F(x), F(x_0)) < \varepsilon$

Như vậy, ta đã chứng minh

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in C_{[a,b]}, d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(F(x), F(x_0)) < \varepsilon$$

hay F liên tục tại x_0.

Bài 4. Cho các không gian metric X, Y và song ánh $f : X \to Y$. Chứng minh các mệnh đề sau tương đương

1. $f^{-1} : Y \to X$ liên tục
2. f là ánh xạ đóng

Giải. Ta có ($f^{-1} : Y \to X$ liên tục)

$\Longleftrightarrow (\forall A \subset X, A$ đóng $\Rightarrow (f^{-1})^{-1}(A)$ đóng trong $Y)$

$\Longleftrightarrow (\forall A \subset X, A$ đóng $\Rightarrow f(A)$ đóng$)$

$\Longleftrightarrow (f : X \to Y$ là ánh xạ đóng$)$

Bài 5. Cho không gian metric (X, d). Với $x \in X$, $\varnothing \neq A \subset X$, ta định nghĩa

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y)$$

Chứng minh các khẳng định sau đây

1. Ánh xạ $f : X \to \mathbb{R}$, $f(x) = d(x, A)$ liên tục
2. $x \in \overline{A} \Leftrightarrow d(x, A) = 0$
3. Nếu F_1, F_2 là các tập đóng, khác $\varnothing$ và $F_1 \cap F_2 = \varnothing$ thì tồn tại các tập mở G_1, G_2 sao cho

$$F_1 \subset G_1, \quad F_2 \subset G_2, \quad G_1 \cap G_2 = \varnothing$$

Giải. 1. Ta sẽ chứng minh $|f(x) - f(x')| \leq d(x, x')$ (*)

Thật vậy, ta có $d(x, y) \leq d(x, x') + d(x', y) \quad \forall y \in A$

$$\Longrightarrow \inf_{y \in A} d(x, y) \leq d(x, x') + \inf_{y \in A} d(x', y)$$

$$\Longrightarrow d(x, A) - d(x', A) \leq d(x, x')$$

2. Ta có

$$
\begin{aligned}
d(x,A)=0 &\iff (\exists\{x_n\}\subset A : \lim_{n\to\infty} d(x,x_n)=0) \quad \text{(do tính chất của inf và } d(x,A)\geq 0)\\
&\iff (\exists\{x_n\}\subset A : \lim x_n = x)\\
&\iff x\in \overline{A}
\end{aligned}
$$

3. Ta xét ánh xạ $g : X \to \mathbb{R}$, $\quad g(x) = d(x,F_1) - d(x,F_2)$

   Ta có g liên tục theo câu 1)

   Đặt $G_1 = \{x \in X : g(x) < 0\}$, $G_2 = \{x \in X : g(x) > 0\}$, ta có

   - $G_1 \cap G_2 = \varnothing$
   - G_1, G_2 là các tập mở (do $G_1 = g^{-1}((-\infty,0))$, $G_2 = g^{-1}((0,+\infty))$, $(0,+\infty)$,$(-\infty,0)$ là các tập mở và g liên tục).
   - $F_1 \subset G_1$ vì $x \in F_1 \Rightarrow \begin{cases} d(x,F_1) = 0 \\ d(x,F_2) > 0 \quad \text{(do } x \notin F_2 \text{ và kết quả câu 2))} \end{cases}$

     $\Rightarrow g(x) < 0$

     Tương tự, $F_2 \subset G_2$

Bài tập tự giải có hướng dẫn

Bài 6. Cho các không gian metric X, (Y_1,d_1), (Y_2,d_2). Trên $Y_1 \times Y_2$, ta xét metric

$$d((y_1,y_2),(y_1',y_2')) = d_1(y_1,y_1') + d_2(y_2,y_2')$$

Giả sử rằng $f_1 : X \to Y_1$, $f_2 : X \to Y_2$ là các ánh xạ liên tục. Chứng minh rằng ánh xạ $f : X \to Y_1 \times Y_2$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$ liên tục.

Hướng dẫn

Sử dụng định lý 1 và điều kiện hội tụ trong không gian metric tích trong bài tập ở §1.

Bài 7. Cho các không gian metric X, Y và ánh xạ $f : X \to Y$. Chứng minh các mệnh đề sau tương đương:

1. f liên tục trên X
2. $f^{-1}(\operatorname{Int} B) \subset \operatorname{Int} f^{-1}(B) \quad \forall B \subset Y$

Hướng dẫn

- 1) $\Rightarrow$ 2) Áp dụng định lý 2 và tính chất "lớn nhất" của phần trong.
- 2) $\Rightarrow$ 1) Áp dụng định lý 2 và tính chất $G = \operatorname{Int} G$ nếu G mở.

Bài 8. Cho các không gian metric (X, d), (Y, ρ) và các ánh xạ liên tục $f, g : X \to Y$. Ta định nghĩa ánh xạ

$$h : X \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \rho(f(x), g(x)), \; x \in X$$

1. Chứng minh h liên tục
2. Suy ra rằng tập $A := \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ là tập đóng.

Hướng dẫn

1. Chứng minh rằng nếu $d_n \xrightarrow{d} x$ thì $h(x_n) \to h(x)$ trong $\mathbb{R}$, sử dụng tính chất $y_n \xrightarrow{\rho} y$, $z_n \xrightarrow{\rho} z$ thì $\rho(y_n, z_n) \to \rho(y, z)$
2. $A = h^{-1}(\{0\})$, $\{0\}$ là tập đóng trong $\mathbb{R}$

Bài 9. Cho không gian metric (X, d) và A, B là các tập đóng khác $\varnothing$, không giao nhau. Chứng minh rằng tồn tại ánh xạ liên tục $f : X \to \mathbb{R}$ sao cho

$$\begin{aligned} 0 \le f(x) \le 1, &\quad \forall x \in X, \\ f(x) = 0, &\quad \forall x \in A, \\ f(x) = 1, &\quad \forall x \in B \end{aligned}$$

Hướng dẫn

Chứng minh hàm $f(x) = \dfrac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}$ cần tìm.