ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Tài liệu ôn thi cao học năm 2005

Phiên bản chưa chỉnh sửa

PGS TS. Mỵ Vinh Quang

Ngày 19 tháng 12 năm 2004

HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1 Các khái niệm cơ bản

1.1 Định nghĩa

Hệ phương trình dạng:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

trong đó $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các ẩn, $a_{ij}, b_j \in \mathbb{R}$ là các hằng số, gọi là *hệ phương trình tuyến tính* (m phương trình, n ẩn).

Ma trận

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

gọi là ma trận các hệ số của hệ (1).

Ma trận

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

gọi là ma trận các hệ số mở rộng của hệ (1). Một hệ phương trình hoàn toàn xác định khi ta biết ma trận các hệ số mở rộng của nó.

Cột

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

gọi là cột tự do của hệ (1).

Chú ý rằng, hệ phương trình (1) có thể cho dưới dạng ma trận như sau

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

trong đó A là ma trận các hệ số của hệ (1).

Nhận xét: Nếu ta thực hiện các phép biến đổi sơ cấp trên các dòng của một hệ phương trình tuyến tính ta được hệ mới tương đương với hệ đã cho.

1.2 Một vài hệ phương trình đặc biệt

a. Hệ Cramer

Hệ phương trình tuyến tính (1) gọi là hệ Cramer nếu $m = n$ (tức là số phương trình bằng số ẩn) và ma trận các hệ số A là không suy biến ($\det A \neq 0$).

b. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Hệ phương trình tuyến tính (1) gọi là hệ thuần nhất nếu cột tự do của hệ bằng 0, tức là $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$.

2 Các phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính

2.1 Phương pháp Cramer

Nội dung của phương pháp này cũng chính là định lý sau đây:

Định lý 1 (Cramer) *Cho hệ Cramer*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{2}$$

trong đó

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

là ma trận các hệ số.

Hệ Cramer luôn có nghiệm duy nhất được cho bởi công thức

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$$

trong đó A_i chính là ma trận thu được từ ma trận A bằng cách thay cột i của A bằng cột tự do

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 = c \\ cx_2 + ax_3 = b \\ cx_1 + bx_3 = a \end{cases}$$

trong đó a, b, c là ba số khác 0.
Giải: Ta có:

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & a \\ c & 0 & b \end{vmatrix} = 2abc \neq 0$$

nên hệ trên là hệ Cramer. Hơn nữa

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} c & b & 0 \\ b & c & a \\ a & 0 & b \end{vmatrix} = \left(a^2 - b^2 + c^2\right) b$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} a & c & 0 \\ 0 & b & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = \left(-a^2 + b^2 + c^2\right) a$$

và

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & c & b \\ c & 0 & a \end{vmatrix} = \left(a^2 + b^2 - c^2\right) c$$

Do đó, hệ có nghiệm duy nhất:

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2ac}, x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc}, x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

2.2 Sử dụng phương pháp biến đổi sơ cấp (phương pháp Gauss) để giải hệ phương trình tuyến tính tổng quát

Nội dung cơ bản của phương pháp này dựa trên định lý quan trong sau về nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính.

Định lý 2 (Định lý Cronecker-Capelly) *Cho hệ phương trình tuyến tính tổng quát* (1), *A và $\overline{A}$ lần lượt là ma trận các hệ số và ma trận các hệ số mở rộng. Khi đó:*

1. *Nếu* $\operatorname{rank} A < \operatorname{rank} \overline{A}$ *thì hệ* (1) *vô nghiệm.*

2. *Nếu* $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \overline{A} = r$ *thì hệ* (1) *có nghiệm. Hơn nữa:*

   (a) *Nếu $r = n$ thì hệ* (1) *có nghiệm duy nhất.*

(b) Nếu $r < n$ thì hệ (1) có vô số nghiệm phụ thuộc vào $n - r$ tham số.

Ta có thuật toán sau để giải hệ phương trình tuyến tính:

Lập ma trận các hệ số mở rộng $\overline{A}$. Bằng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng đưa ma trận $\overline{A}$ về dạng bậc thang. Ma trận bậc thang cuối cùng có dạng:

$$\overline{A} \to C = \left[\begin{array}{ccccccccccc|c} 0 & \dots & c^*_{1i_1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & c^*_{2i_2} & \dots & \dots & \dots & c_{2n} & d_2 \\ . & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & & \dots & c^*_{ri_r} & \dots & c_{rn} & d_r \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & d_{r+1} \\ . & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & d_m \end{array}\right]$$

Hệ phương trình tương ứng với ma trận C tương đương với hệ ban đầu. Do đó

1. Nếu tồn tại ít nhất d_i với $r + 1 \leqslant i \leqslant m$ khác 0 thì hệ vô nghiệm.

2. Nếu $d_{r+1} = d_{r+2} = \dots = d_m = 0$ thì hệ có nghiệm. Khi đó các cột $i_1, i_2, \dots, i_r$ (là các cột được đánh dấu *) giữ lại bên trái và các $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_r}$ là các ẩn còn các cột còn lại chuyển sang bên phải, các ẩn x_k ứng với các cột này sẽ trở thành tham số. Vậy ta có $n - r$ tham số và hệ đã cho tương đương với hệ

$$\left[\begin{array}{cccc|c} c_{1i_1} & c_{1i_2} & \dots & c_{1i_r} & d_1(x_k) \\ 0 & c_{2i_2} & \dots & c_{2i_r} & d_2(x_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_{ri_r} & d_r(x_k) \end{array}\right] \qquad (3)$$

trong đó $d_i(x_k)$ là các hàm tuyến tính của x_k với $k \neq i_1, i_2, \dots, i_r$. Hệ phương trình (3) là hệ phương trình dạng tam giác, ta có thể dễ dàng giải được bằng phương pháp thế dần từ dưới lên, tức là tính lần lượt $x_r, x_{r-1}, \dots, x_1$.

Chú ý : Nếu trong quá trình biến đổi xuất hiện 1 dòng mà bên trái bằng 0 còn bên phải khác 0 thì ta có thể kết luận hệ vô nghiệm mà không cần phải làm tiếp.

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_4 + x_5 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 = m \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 2m - 8 \end{cases}$$

Giải:

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 6 & 2 & 3 & 1 & m \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2m-8 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{d_3 \to (-3)d_1 + d_3 \\ d_4 \to (-1)d_1 + d_4}]{d_2 \to (-2)d_1 + d_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -2 & m-3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 2m-9 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[d_4 \to (-1)d_2 + d_4]{d_3 \to (-2)d_2 + d_3} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & m-5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 2m-10 \end{array}\right] \xrightarrow{d_4 \to (-1)d_3 + d_4} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & m-5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m-5 \end{array}\right]$$

* Nếu $m \neq 5$ hệ phương trình vô nghiệm.
* Nếu $m = 5$, hệ đã cho tương đương với

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1^* & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1^* & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1^* & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Trường hợp này hệ có vô số nghiệm phụ thuộc vào 2 tham số là x_2 và x_5. Chuyển cột 2 và cột 5 sang bên phải, hệ có dạng

$$\begin{cases} x_1 + 2x_4 &= 1 - 2x_2 - 2x_5 \\ x_3 - x_4 &= 1 + 2x_5 \\ -x_4 &= -2x_5 \end{cases}$$

Giải từ dưới lên ta sẽ có

$$\begin{aligned} &x_4 = 2x_5 \\ &x_3 = x_4 + 2x_5 + 1 = 4x_5 + 1 \\ &x_1 = 1 - 2x_2 - 2x_5 - 2x_4 = -2x_2 - 5x_5 + 1 \end{aligned}$$

Tóm lại, trong trường hợp này nghiệm của hệ là

$$\begin{cases} x_1 = -2a - 5b + 1 \\ x_2 = a \\ x_3 = 4b + 1 & a, b \text{ tùy ý.} \\ x_4 = 2b \\ x_5 = b \end{cases}$$

Ví dụ 3: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + mx_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + mx_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + mx_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ mx_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

Giải:

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[d_4 \to (-m)d_1 + d_4]{\substack{d_2 \to (-1)d_1 + d_2 \\ d_3 \to (-1)d_1 + d_3}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & m & 1 \\ 0 & 0 & m-1 & 1-m & 0 \\ 0 & m-1 & 0 & 1-m & 0 \\ 0 & 1-m & 1-m & 1-m^2 & 1-m \end{array}\right.$$

$$\xrightarrow{d_2 \leftrightarrow d_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & m & 1 \\ 0 & m-1 & 0 & 1-m & 0 \\ 0 & 0 & m-1 & 1-m & 0 \\ 0 & 1-m & 1-m & 1-m^2 & 1-m \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{d_4 \to d_2 + d_3 + d_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & m & 1 \\ 0 & m-1 & 0 & 1-m & 0 \\ 0 & 0 & m-1 & 1-m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-2m-m^2 & 1-m \end{array}\right] = C$$

Chú ý rằng $3-2m-m^2=(1-m)(m+3)$. Bởi vậy:

1) $m=1$, khi đó

$$C=\left[\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right]$$

Hệ có vô số nghiệm phụ thuộc vào 3 tham số x_2, x_3, x_4. Nghiệm là

$$\begin{cases}x_1=1-a-b-c\\x_2=a\\x_3=b\\x_4=c\end{cases}$$

2) $m=-3$, khi đó

$$C=\left[\begin{array}{cccc|c}1&1&1&-3&1\\0&-4&0&4&0\\0&0&-4&4&0\\0&0&0&0&4\end{array}\right]$$

Hệ vô nghiệm.

3) $m\neq 1$ và $m\neq -3$, hệ có nghiệm duy nhất

$$x_4=\frac{1-m}{3-2m-m^2}=\frac{1}{m+3}$$
$$x_3=x_4=\frac{1}{m+3}\,,\ x_2=x_4=\frac{1}{m+3}$$
$$x_1=1-x_2-x_3-mx_4=\frac{1}{m+3}$$

Vậy: $x_1=x_2=x_3=x_4=\frac{1}{m+3}$.

Tóm lại:

- $m=1$ hệ có vô số nghiệm;
- $m=-3$ hệ vô nghiệm;
- $m\neq 1,-3$, hệ có một nghiệm duy nhất $x_1=x_2=x_3=x_4=\frac{1}{m+3}$.

Bài tập

Giải và biện luận các hệ sau:

27. $$\begin{cases}2x_1+x_2+x_3+x_4=1\\x_1+2x_2-x_3+4x_4=2\\x_1+7x_2-4x_3+11x_4=m\\4x_1+8x_2-4x_3+16x_4=m+1\end{cases}$$

28. $$\begin{cases}2x_1-x_2+x_3-2x_4+3x_5=3\\x_1+x_2-x_3-x_4+x_5=1\\3x_1+x_2+x_3-3x_4+4x_5=6\\5x_1+2x_3-5x_4+7x_5=9-m\end{cases}$$

29. $\begin{cases} mx_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + mx_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + mx_3 = 1 \end{cases}$

30. $\begin{cases} mx_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + mx_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + mx_3 + x_4 = 1 \end{cases}$

31. Cho a_{ij} là các số nguyên. Giải hệ:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \frac{1}{2}x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \ldots \\ \frac{1}{2}x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

32. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 \\ x_1 + 2x_2 + \cdots + 2^{n-1}x_n = 1 \\ x_1 + 3x_2 + \cdots + 3^{n-1}x_n = 1 \\ \ldots \\ x_1 + nx_2 + \cdots + n^{n-1}x_n = 1 \end{cases}$$

33. Chứng minh rằng hệ phương trình:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

trong đó $a_{ij} = -a_{ji}$ và n lẽ, có nghiệm khác 0.