GIẢI TÍCH (CƠ SỞ)

Chuyên ngành: **Giải Tích**, **PPDH Toán**

Phần 1. **Không gian metric**

§4. **Tập compact, không gian compact**

(Phiên bản đã chỉnh sửa)

PGS TS Nguyễn Bích Huy

Ngày 20 tháng 12 năm 2004

Tóm tắt lý thuyết

1 Định nghĩa

Cho các không gian metric (X, d)

1. Một họ $\{G_i : i \in I\}$ các tập con của X được gọi là một phủ của tập $A \subset X$ nếu $A \subset \bigcup_{i \in I} G_i$

   Nếu I là tập hữu hạn thì ta nói phủ là hữu hạn.

   Nếu mọi G_i là tập mở thì ta nói phủ là phủ mở.

2. Tập $A \subset X$ được gọi là tập compact nếu từ mỗi phủ mở của A ta luôn có thể lấy ra được một phủ hữu hạn.

3. Tập A được gọi là compact tương đối nếu $\overline{A}$ là tập compact.

2 Các tính chất

2.1 Liên hệ với tập đóng

Nếu A là tập compact trong không gian metric thì A là tập đóng.

Nếu A là tập compact, $B \subset A$ và B đóng thì B là tập compact.

2.2 Hệ có tâm các tập đóng

Họ $\{F_i : i \in I\}$ các tập con của X được gọi là họ có tâm nếu với mọi tập con hữu hạn $J \subset I$ thì $\bigcap_{i \in J} F_i \neq \varnothing$.

Định lí 1. *Các mệnh đề sau là tương đương:*

1. *X là không gian compact.*
2. *Mọi họ có tâm các tập con đóng của X đều có giao khác $\varnothing$.*

Định lí 2. *Giả sử $f : X \to Y$ là ánh xạ liên tục và $A \subset X$ là tập compact. Khi đó, $f(A)$ là tập compact.*

Hệ quả. *Nếu $f : X \to \mathbb{R}$ là một hàm liên tục và $A \subset X$ là tập compact thì f bị chặn trên A và đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trên A, nghĩa là:*

$$\exists x_1, x_2 \in A : f(x_1) = \inf f(A), \quad f(x_2) = \sup f(A)$$

Định lí 3 (Weierstrass). *Trong không gian metric X, các mệnh đề sau là tương đương:*

1. *Tập $A \subset X$ là compact.*
2. *Từ mỗi dãy $\{x_n\} \subset A$ có thể lấy ra một dãy con hội tụ về phần tử thuộc A.*

2.3 Tiêu chuẩn compact trong $\mathbb{R}^n$

Trong không gian $\mathbb{R}^n$ (với metric thông thường), một tập A là compact khi và chỉ khi nó đóng và bị chặn.

2.4 Tiêu chuẩn compact trong $C_{[a,b]}$

Định nghĩa. Cho tập $A \subset C_{[a,b]}$.

1. Tập A được gọi là bị chặn từng điểm trên $[a, b]$ nếu với mọi $t \in [a, b]$ tồn tại số $M_t > 0$ sao cho $|x(t)| \leq M_t$, $\forall x \in A$.

   Tập A được gọi là bị chặn đều trên $[a, b]$ nếu tồn tại số $M > 0$ sao cho

   $$|x(t)| \leq M, \ \forall t \in [a, b], \ \forall x \in A.$$

2. Tập A gọi là đồng liên tục tục trên $[a, b]$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại số $\delta > 0$ sao cho với mọi $t, s \in [a, b]$ mà $|t - s| < \delta$ và với mọi $x \in A$ thì ta có $|x(t) - x(s)| < \varepsilon$.

Ví dụ. Giả sử $A \subset C_{[a,b]}$ là tập các hàm $x = x(t)$ có đạo hàm trên (a, b) và $|x'(t)| \leq 2, \forall t \in (a, b)$.

- Tập A là liên tục đồng bậc. Thật vậy, do định lý Lagrange ta có

  $$|x(t) - x(s)| = |x'(c)(t - s)| \leq 2.|t - s|$$

  Do đó, cho trước $\varepsilon > 0$, ta chọn $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ thì có:

  $$\forall x \in A, \ \forall t, s \in [a, b], \ |t - s| < \delta \Rightarrow |x(t) - x(s)| < \varepsilon$$

- Nếu thêm giả thiết A bị chặn tại điểm $t_0 \in [a, b]$ thì A bị chặn đều trên $[a, b]$. Thật vậy

  $$\begin{aligned} |x(t)| &\leq |x(t) - x(t_0)| + |x(t_0)| = |x'(c).(t - t_0)| + |x(t_0)| \\ &\leq 2(b - a) + M_{t_0} \qquad \forall t \in [a, b], \forall x \in A \end{aligned}$$

Định lí 4 (Ascoli - Arzela). *Tập $A \subset C_{[a,b]}$ (với metric hội tụ đều) là compact tương đối khi và chỉ khi A bị chặn từng điểm và đồng liên tục trên $[a, b]$.*

Bài tập

Bài 1. 1. Cho X là không gian metric compact, $\{F_n\}$ là họ các tập đóng, khác rỗng, thỏa mãn $F_n \supset F_{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots)$. Chứng minh $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \varnothing$

2. Giả sử $\{F_n\}$ là họ có tâm các tập đóng, bị chặn trên $\mathbb{R}$. Chứng minh $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \varnothing$

Giải. 1. Ta chứng minh $\{F_n\}$ là họ có tâm. Nếu $J \in \mathbb{N}$ là tập hữu hạn, ta đặt $n_0 = \max J$ thì sẽ có $\displaystyle\bigcap_{n \in J} F_n = F_{n_0} \neq \varnothing$

Ghi chú. Dạng khác của câu 1) là: Cho F_1 là tập compact, F_n $(n \geq 2)$ là các tập đóng khác $\varnothing$ và $F_1 \supset F_2 \supset \cdots$. Khi đó $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \varnothing$

2. Ta xây dựng dãy tập hợp $\{K_n\}$ như sau:

$$K_1 = F_1, \quad K_n = \bigcap_{k=1}^{n} F_k \qquad (n \geq 2)$$

Thế thì ta có

- K_n compact, $K_n \neq \varnothing$ (do họ $\{F_n\}$ có tâm)
- $F_1 \supset F_2 \supset \cdots \quad , \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$

  Do đó, theo ghi chú trên ta có $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \varnothing$

Bài 2. Cho X là không gian compact và $f : X \to \mathbb{R}$ liên tục. Chứng minh f bị chặn trên X và đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải. Đặt $a = \inf f(x)$, ta có $a \geq -\infty$ (ta hiểu cận dưới đúng của tập không bị chặn dưới là $-\infty$). Ta luôn có thể tìm được dãy số $\{a_n\}$ sao cho $a_n > a_{n+1}$, $\lim a_n = a$. Ta đặt $F_n = \{x \in X : f(x) \leq a_n\} \quad (n \geq 1)$, ta có

- F_n là tập đóng (do $F_n = f^{-1}((-\infty, a_n])$)
- $F_n \neq \varnothing \quad$ (do $a_n > a = \inf f(X)$)
- $F_n \supset F_{n+1} \quad$ (do $a_n > a_{n+1}$)

Do đó, theo bài 1) thì tồn tại $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. Ta có

$$f(x_0) \leq a_n \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$$\Rightarrow f(x_0) \leq a$$

Vậy $f(x_0) = a$, nói riêng $a \neq -\infty$. Ta có đpcm.

Bài 3. Cho không gian metric (X, d) và A, B là các tập con khác $\varnothing$ của X. Ta định nghĩa

$$d(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} d(x, y)$$

1. Giả sử A, B là các tập compact, chứng minh tồn tại $x_0 \in A$, $y_0 \in B$ sao cho

$$d(A, B) = d(x_0, y_0)$$

2. Giả sử A đóng, B compact và $A \cap B = \varnothing$, chứng minh $d(A, B) > 0$.

   Nêu ví dụ chứng tỏ kết luận không đúng nếu thay giả thiết B compact bằng B đóng.

Giải. 1. Tồn tại các dãy $\{x_n\} \subset A$, $\{y_n\} \subset B$ sao cho $\lim d(x_n, y_n) = d(A, B)$. Do A compact nên $\{x_n\}$ có dãy con $\{x_{n_k}\}_k$ hội tụ về một phần tử $x_0 \in A$. Xét dãy con tương ứng $\{y_{n_k}\}_k$ của $\{y_n\}$. Do B compact nên $\{y_{n_k}\}_k$ có dãy con $\{y_{n_{k_i}}\}_i$ hội tụ về một phần tử $y_0 \in B$.

Ta có:

- $\lim\limits_{i\to\infty} x_{n_{k_i}} = x_0$ (vì là dãy con của $\{x_{n_k}\}$)
- $\lim\limits_{i\to\infty} d(x_{n_{k_i}}, y_{n_{k_i}}) = d(A, B)$ (vì là dãy con của $\{d(x_n, y_n)\}$)
- $\lim\limits_{i\to\infty} d(x_{n_{k_i}}, y_{n_{k_i}}) = d(x_0, y_0)$ (hệ quả của bđt tứ giác)

Do đó, $d(x_0, y_0) = d(A, B)$

2.
- Giả sử trái lại, $d(A, B) = 0$. Khi đó, ta tìm được các dãy $\{x_n\} \subset A$, $\{y_n\} \subset B$ sao cho $\lim d(x_n, y_n) = 0$.

  Do B compact nên $\{y_n\}$ có dãy con $\{y_{n_k}\}_k$ hội tụ về $y_0 \in B$. Từ
  $$d(x_{n_k}, y_0) \le d(x_{n_k}, y_{n_k}) + d(y_{n_k}, y_0)$$
  ta suy ra $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = y_0$

  Do A là tập đóng, $\{x_{n_k}\} \subset A$ nên ta suy ra $y_0 \in A$, mâu thuẫn với giả thiết $A \cap B = \varnothing$.

- Trong $\mathbb{R}^2$ ta xét metric thông thường và đặt
  $$A = \{(t, 0) : t \in \mathbb{R}\},$$
  $$B = \left\{\left(t, \frac{1}{t}\right) : t > 0\right\}$$
  Ta có A, B là các tập đóng, $A \cap B = \varnothing$

  Đặt $x = (t, 0)$, $\quad y = \left(t, \dfrac{1}{t}\right) \quad (t > 0)$

  Ta có $d(x, y) = \dfrac{1}{t} \to 0 \quad (t \to +\infty)$

  Do đó, $d(A, B) = 0$

Bài 4. Cho không gian metric (X, d) và $A \subset X$, là tập compact, V là tập mở chứa A. Ta ký hiệu $B(A, \varepsilon) := \{x \in X : d(x, A) < \varepsilon\}$

Chứng minh tồn tại số $\varepsilon > 0$ sao cho $B(A, \varepsilon) \subset V$.

Giải. • *Cách 1*

Do $A \subset V$ và V là tập mở nên $\forall x \in A, \exists r_x > 0 : B(x, 2r_x) \subset V$

Họ $\{B(x, r_x) : x \in A\}$ là một phủ mở của tập compact A nên tồn tại $x_1, \ldots, x_n$ sao cho

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k, r_{x_k})$$

Đặt $\varepsilon = \min\{r_{x_1}, \ldots, r_{x_2}\}$, ta sẽ chứng minh $B(A, \varepsilon) \subset V$.

Xét tùy ý $y \in B(A, \varepsilon)$, ta có

$$d(y, A) < \varepsilon$$
$$\Rightarrow \exists x \in A : d(y, x) < \varepsilon$$
$$\Rightarrow \exists k = \overline{1, n} : x \in B(x_k, r_{x_k})$$

Khi đó, $d(y, x_k) \leq d(y, x) + d(x, x_k) < \varepsilon + r_{x_k} \leq 2r_{x_k}$

Do đó, $y \in B(x_k, 2r_{x_k}) \subset V$

- *Cách 2*

  Đặt $B = X \setminus V$, ta có B đóng và $A \cap B = \varnothing$ nên theo bài 3 ta có $d(A, B) > 0$. Chọn $\varepsilon = d(A, B)$. Ta sẽ chứng minh $B(A, \varepsilon) \subset V$ hay chỉ cần chứng tỏ $B(A, \varepsilon) \cap B = \varnothing$

  Thật vậy, nếu có $y \in B(A, \varepsilon) \cap B$, thì ta có

  $$d(y, A) < \varepsilon \Rightarrow \exists x \in A : d(y, x) < \varepsilon$$

  Mặt khác $x \in A$, $y \in B$ nên $d(x, y) \geq d(A, B) = \varepsilon$. Vô lý.

Bài 5. Cho X, Y là các không gian metric, với X là không gian compact và $f : X \to Y$ là song ánh liên tục. Chứng minh f là ánh xạ đồng phôi.

Giải. Ta cần chứng minh ánh xạ ngược f^{-1} liên tục. Do một bài tập ở §3, chỉ cần chứng tỏ f là ánh xạ đóng.

Với $A \subset X$ là tập đóng, ta có

$$\begin{aligned} A \text{ compact } &\Rightarrow f(A) \text{ compact} \\ &\Rightarrow f(A) \text{ đóng} \end{aligned}$$

Vậy f là ánh xạ đóng.

Các bài tập tự giải

Bài 6. Cho các không gian metric compact X, Y và ánh xạ $f : X \to Y$. Chứng minh các mệnh đề sau tương đương:

1. f liên tục
2. $f^{-1}(K)$ là tập compact với mọi tập compact $K \subset Y$

Hướng dẫn

Sử dụng liên hệ giữa tính compact và tính đóng.

Bài 7. Cho không gian metric (X, d) và các tập A, B khác $\varnothing$, trong đó A compact. Chứng minh tồn tại điểm $x_0 \in A$ sao cho $d(x_0, B) = d(A, B)$.

Hướng dẫn

Sử dụng $d(A, B) = \inf\limits_{x \in A} d(x, B)$

Bài 8. Cho không gian metric (X, d) và $f : X \to X$ là ánh xạ liên tục. Điểm x gọi là điểm bất động của f nếu $f(x) = x$.

1. Chứng minh tập điệm bất động của f là tập đóng.

2. Giả sử X là compact và f không có điểm bất động nào. Chứng minh tồn tại số $c > 0$ sao cho $d(f(x), x) \geq c \qquad \forall x \in X$

Hướng dẫn

Đặt $h(x) = d(f(x), x)$, $x \in X$ thì $h : X \to \mathbb{R}$ liên tục.

1. Chú ý rằng: x bất động $\Longleftrightarrow h(x) = 0$

2. Cần chứng minh $\inf\limits_{x \in X} h(x) > 0$

Ngoài ra, câu 1) có thể chứng minh trực tiếp dựa vào liên hệ giữa tính chất đóng và sự hội tụ, câu 2) có thể dùng phản chứng để giải.