ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

§8. Giải bài tập về ma trận nghịch đảo

Phiên bản đã chỉnh sửa

PGS TS Mỵ Vinh Quang

Ngày 29 tháng 12 năm 2004

Bài 21. *Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Giải

Cách 1. *Sử dụng phương pháp định thức*

Ta có: $\det A = 2 + 12 - 9 - 2 = 3$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6 \qquad A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Vậy

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 6 & -3 \\ -1 & -7 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Cách 2. *Sử dụng phương pháp biến đổi sơ cấp*

Xét ma trận

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3 \to -3d_1 + d_3]{d_2 \to -2d_1 + d_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_3 = -2d_2 + d_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{d_3 = \frac{1}{3}d_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

Vậy

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Bài 22. *Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Giải

Ta sử dụng phương pháp định thức.

Ta có $\det A = 1 + 27 + 8 - 6 - 6 - 6 = 18$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5 \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 7 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

Vậy

$$A^{-1} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} -5 & 1 & 7 \\ 7 & -5 & 1 \\ 1 & 7 & -5 \end{pmatrix}$$

(Bạn đọc cũng có thể sử dụng phương pháp biến đổi sơ cấp để giải bài này)

Bài 23. *Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Giải

Ta sử dụng phương pháp 3.

Xét hệ

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = y_1 & (1) \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = y_2 & (2) \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = y_3 & (3) \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = y_4 & (4) \end{cases}$$

$(1) + (2) + (3) + (4) \Longrightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) \qquad (*)$

$(*) - (1) \Longrightarrow x_1 = \frac{1}{4}(-y_1 + y_2 + y_3 + y_4)$

$(*) - (2) \Longrightarrow x_2 = \frac{1}{4}(y_1 - y_2 + y_3 + y_4)$

$(*) - (3) \Longrightarrow x_3 = \frac{1}{4}(y_1 + y_2 - y_3 + y_4)$

$(*) - (4) \Longrightarrow x_4 = \frac{1}{4}(y_1 + y_2 + y_3 - y_4)$

Vậy

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Bài 24. *Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Giải

Sử dụng phương pháp 3.

Xét hệ

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = y_1 & (1) \\ -x_1 + x_3 + x_4 = y_2 & (2) \\ -x_1 - x_2 + x_4 = y_3 & (3) \\ -x_1 - x_2 - x_3 = y_4 & (4) \end{cases}$$

$(1) + (2) - (3) + (4) \Longrightarrow -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = y_1 + y_2 - y_3 + y_4 \qquad (*)$

$(1) - (*) \Longrightarrow x_1 = -y_2 + y_3 - y_4$

$(*) - (2) \Longrightarrow x_2 = y_1 - y_3 + y_4$

$(4) \Longrightarrow x_3 = -x_1 - x_2 - y_4 = -y_1 + y_2 - y_4$

$(3) \Longrightarrow x_4 = x_1 + x_2 + y_3 = y_1 - y_2 + y_3$

Vậy

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Bài 25. *Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

Giải

Sử dụng phương pháp 3.

Xét hệ

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = y_1 & (1) \\ \phantom{x_1 +{}} x_2 + \cdots + x_n = y_2 & (2) \\ \vdots & \\ x_{n-1} + x_n = y_{n-1} & (n-1) \\ x_n = y_n & (n) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (1) - (2) &\Longrightarrow x_1 = y_1 - y_2 \\ (2) - (3) &\Longrightarrow x_2 = y_2 - y_3 \\ &\vdots \\ (n-1) - (n) &\Longrightarrow x_{n-1} = y_{n-1} - y_n \\ (n) \quad &\Longrightarrow x_n = y_n \end{aligned}$$

Vậy

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bài 26. *Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận*

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a \end{pmatrix}$$

Giải

Sử dụng phương pháp 3.

Xét hệ

$$\begin{cases} (1+a)x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = y_1 & (1) \\ x_1 + (1+a)x_2 + x_3 + \cdots + x_n = y_2 & (2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + (1+a)x_n = y_n & (n) \end{cases}$$

Lấy $(1) + (2) + \cdots + (n)$, ta có

$$(n+a)(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$$

1. Nếu $a = -n$, ta có thể chọn tham số $y_1, y_2, \ldots, y_n$ thỏa $y_1 + \cdots + y_n \neq 0$. Khi đó hệ vô nghiệm và do đó ma trận A không khả nghịch.

2. Nếu $a \neq -n$, khi đó ta có

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \frac{1}{n+a}(y_1 + \cdots + y_n) \qquad (*)$$

$$(1) - (*) \Longrightarrow ax_1 = \frac{1}{n+a}((n+a-1)y_1 - y_2 - \cdots - y_n)$$

   (a) Nếu $a = 0$, ta có thể chọn tham số $y_1, y_2, \ldots, y_n$ để phương trình trên vô nghiệm. Do đó hệ vô nghiệm và ma trận A không khả nghịch.

   (b) Nếu $a \neq 0$, ta có

$$x_1 = \frac{1}{a(n+a)}((n+a-1)y_1 - y_2 - \cdots - y_n)$$

$$(2) - (*) \Longrightarrow x_2 = \frac{1}{a(n+a)}(y_1 - (n+a-1)y_2 - y_3 - \cdots - y_n)$$

$$\vdots$$

$$(n) - (*) \Longrightarrow x_n = \frac{1}{a(n+a)}(y_1 - y_2 - y_3 - \cdots - (n+a-1)y_n)$$

   Vậy

$$A^{-1} = \frac{1}{a(n+a)} \begin{pmatrix} n+a-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n+a-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & n+a-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & n+a-1 \end{pmatrix}_{n\times n}$$