ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Tài liệu ôn thi cao học năm 2005

Phiên bản đã chỉnh sửa

PGS TS Mỵ Vinh Quang

Ngày 24 tháng 1 năm 2005

§9. Giải Bài Tập Về Hệ Phương Trình Tuyến Tính

27) Giải hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = m \\ 4x_1 + 8x_2 - 4x_3 + 16x_4 = m + 1 \end{cases}$$

Giải: Lập ma trận các hệ số mở rộng $\overline{A}$ và dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng để đưa ma trận $\overline{A}$ về dạng bậc thang. Nhận xét rằng hệ ban đầu tương đương với hệ có ma trận các hệ số mở rộng là ma trận bậc thang sau cùng. Cụ thể ta có

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & m \\ 4 & 8 & -4 & 16 & m+1 \end{array}\right] \xrightarrow{d_1 \leftrightarrow d_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & m \\ 4 & 8 & -4 & 16 & m+1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{d_3 \to -d_1 + d_3 \\ d_4 \to -4d_1 + d_4}]{d_2 \to -2d_1 + d_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & -7 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 7 & m-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m-7 \end{array}\right] \xrightarrow[d_3 \leftrightarrow d_2]{d_2 \to 2d_2 + d_3}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & -7 & m-8 \\ 0 & -3 & 3 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m-7 \end{array}\right] \xrightarrow{d_3 \to -3d_2 + d_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & -7 & m-8 \\ 0 & 0 & -6 & 14 & -3m+21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m-7 \end{array}\right]$$

• Nếu $m \neq 7$ thì hệ vô nghiệm
• Nếu $m = 7$ hệ tương đương với

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1^* & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -1^* & 3 & -7 & m-8 \\ 0 & 0 & -6^* & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

hệ có vô số nghiệm phụ thuộc một tham số là x_4. Ta có

$$x_3 = \frac{7}{3}x_4, \quad x_2 = 3x_3 - 7x_4 + 1 = 1$$
$$x_1 = 2 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = \frac{7}{3}x_4 - 4x_4 = \frac{-5}{3}x_4$$

Vậy, trong trường hợp này, nghiệm của hệ là

$$\begin{cases} x_1 = -5a \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 7a \\ x_4 = 3a \end{cases} \qquad (a \in \mathbb{R})$$

28) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 6 \\ 5x_1 + 2x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 9 - m \end{cases}$$

Giải: Lập ma trận các hệ số mở rộng

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccccc|l} 2 & -1 & 1 & -2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -3 & 7 & 6 \\ 5 & 0 & 2 & -5 & 4 & 9-m \end{array}\right] \xrightarrow{d_1 \leftrightarrow d_2} \left[\begin{array}{ccccc|l} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & -3 & 7 & 6 \\ 5 & 0 & 2 & -5 & 4 & 9-m \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{d_3 \to -3d_1 + d_3 \\ d_4 \to -5d_1 + d_4}]{d_2 \to -2d_1 + d_2} \left[\begin{array}{ccccc|l} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 7 & 0 & 2 & 4-m \end{array}\right] \xrightarrow{d_2 \to d_2 - d_3} \left[\begin{array}{ccccc|l} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 7 & 0 & 2 & 4-m \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[d_4 = -5d_2 + d_4]{d_3 \to -2d_2 + d_3} \left[\begin{array}{ccccc|l} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 2 & 9-m \end{array}\right] \xrightarrow{d_4 \to -2d_3 + d_4} \left[\begin{array}{ccccc|l} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9-m \end{array}\right]$$

- Nếu $m \neq 9$ thì hệ vô nghiệm.
- Nếu $m = 9$ thì hệ có dạng

$$\left[\begin{array}{ccccc|l} 1^* & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1^* & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 6^* & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \overline{A} = 3$ nên hệ có vô số nghiệm phụ thuộc 2 tham số là x_4, x_5, ta có

$$\begin{aligned} x_3 &= -\frac{1}{6}x_5 \\ x_2 &= -x_3 + 1 = \frac{1}{6}x_5 + 1 \\ x_1 &= -x_2 + x_3 + x_4 - x + 5 + 1 \\ &= -\frac{1}{6}x_5 - 1 - \frac{1}{6}x_5 + x_4 - x_5 + 1 = -\frac{4}{3}x_5 + x_4 \end{aligned}$$

Vậy, trong trường hợp này nghiệm của hệ là

$$\begin{cases} x_1 = a - 8b \\ x_2 = b + 1 \\ x_3 = -b & \qquad a, b \in \mathbb{R} \\ x_4 = a \\ x_5 = 6b \end{cases}$$

29) Giải và biện luận hệ phương trình

$$\begin{cases} mx_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + mx_2 + x_3 = m \\ x_1 + x_2 + mx_3 = m^2 \end{cases}$$

Giải: Lập ma trận các hệ số mở rộng

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & m \\ 1 & 1 & m & m^2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & m^2 \\ 1 & m & 1 & m \\ m & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & m^2 \\ 0 & m-1 & 1-m & m-m^2 \\ 0 & 1-m & 1-m^2 & 1-m^3 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & m^2 \\ 0 & m-1 & 1-m & m-m^2 \\ 0 & 0 & 2-m-m^2 & 1+m-m^2-m^3 \end{array}\right]$$

Chú ý rằng $2 - m - m^2 = (2 + m)(1 - m)$. Ta có

• $m = 1$, hệ trở thành

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \overline{A} = 1$ nên hệ có vô số nghiệm phụ thuộc hai tham số x_1, x_2. Nghiệm là

$$\begin{cases} x_1 = 1 - a - b \\ x_2 = a & \qquad a, b \in \mathbb{R} \\ x_3 = b \end{cases}$$

• $m = -2$, hệ trở thành

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right] \quad \text{hệ vô nghiệm}$$

• $m \neq 1, m \neq -2$, hệ có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x_3 = \dfrac{1 + m - m^2 - m^3}{(2 + m)(1 - m)} = \dfrac{m^2 + 2m + 1}{m + 2} \\ x_2 = x_3 - m = \dfrac{m^2 + 2m + 1}{m + 2} - m = \dfrac{1}{m + 2} \\ x_1 = m^2 - x_2 - mx_3 = \dfrac{m^3 + 2m^2 - 1 - m(m^2 + 2m + 1)}{m + 2} = \dfrac{-m - 1}{m + 2} \end{cases}$$

30) Giải và biện luận hệ phương trình

$$\begin{cases} mx_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + mx_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + mx_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

Giải: Lập ma trận các hệ số mở rộng

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} m & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{d_1 \leftrightarrow d_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[d_3 \to -md_1 + d_3]{d_2 \to -d_1 + d_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & m & 1 & 1 \\ 0 & m-1 & 1-m & 0 & 0 \\ 0 & 1-m & 1-m^2 & 1-m & 1-m \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{d_3 \to d_2 + d_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & m & 1 & 1 \\ 0 & m-1 & 1-m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-m-m^2 & 1-m & 1-m \end{array}\right] \quad (*)$$

Chú ý rằng $2 - m - m^2 = (1-m)(2+m)$. Ta có các khả năng sau

• $m = 1$ hệ trở thành

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \overline{A} = 1$, trường hợp này hệ có vô số nghiệm phụ thuộc ba tham số x_2, x_3, x_4. Nghiệm của hệ là

$$\begin{cases} x_1 = 1 - a - b - c \\ x_2 = a \\ x_3 = b \\ x_4 = c \end{cases} \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$$

• $m = -2$ hệ trở thành

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1^* & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3^* & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3^* & 3 \end{array}\right]$$

Ta có $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \overline{A} = 3$ nên hệ có vô số nghiệm phụ thuộc một tham số là x_3. Ta có

$$x_4 = 1,\ 3x_2 = 3x_3 \Rightarrow x_2 = x_3$$
$$x_1 = -x_2 + 2x_3 - x_4 + 1 = x_3$$

Trong trường hợp này nghiệm của hệ là

$$\begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = a \\ x_3 = a \\ x_4 = 1 \end{cases} \qquad a \in \mathbb{R}$$

• $m \neq 1, -2$. Khi đó, từ $(*)$ ta thấy hệ có vô số nghiệm phụ thuộc tham số x_4 và m. Ta có

$$(2 - m - m^2)x_3 = (1-m) - (1-m)x_4 \Rightarrow x_3 = \frac{(1-m) - (1-m)x_4}{(2 - m - m^2)} = \frac{1 - x_4}{m+2}$$

$$(m-1)x_2 = (m-1)x_3 \Rightarrow x_2 = x_3$$

$$x_1 = 1 - x_2 - mx_3 - x_4 = \frac{(m+2) - (1-x_4) - m(1-x_4) - (m+2)x_4}{m+2} = \frac{1 - x_4}{m+2}$$

Vậy, trong trường hợp này hệ có nghiệm là

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1-a}{m+2} \\ x_2 = \dfrac{1-a}{m+2} \\ x_3 = \dfrac{1-a}{m+2} \\ x_4 = a \end{cases}$$

31) Cho a_{ij} là các số nguyên, giải hệ

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \dfrac{1}{2}x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \ldots \\ \dfrac{1}{2}x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

Giải: Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} (2a_{11}-1)\,x_1 + 2a_{12}x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_n = 0 \\ 2a_{21}x_1 + (2a_{22}-1)\,x_2 + \cdots + 2a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots \\ 2a_{n1}x_1 + 2a_{n2}x_2 + \cdots + (2a_{nn}-1)\,x_n = 0 \end{cases}$$

Gọi ma trận các hệ số của hệ phương trình trên là A_n, ta có

$$\det A_n = \begin{vmatrix} 2a_{11}-1 & 2a_{12} & \ldots & 2a_{1n} \\ 2a_{21} & 2a_{22}-1 & \ldots & 2a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 2a_{n1} & 2a_{n2} & \ldots & 2a_{nn}-1 \end{vmatrix}$$

Chú ý rằng a_{ij} là các số nguyên nên các phần bù đại số của $(A_n)_{ij}$ cũng là các số nguyên, do đó nếu khai triển định thức theo dòng cuối ta sẽ có

$$\begin{aligned} \det A_n &= 2k + (2a_{nn}-1)\begin{vmatrix} 2a_{11}-1 & 2a_{12} & \ldots & 2a_{1,n-1} \\ 2a_{21} & 2a_{22}-1 & \ldots & 2a_{2,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 2a_{n-1,1} & 2a_{n-1,2} & \ldots & 2a_{n-1,n-1}-1 \end{vmatrix} \\ &= 2k + (2a_{nn}-1)\det A_{n-1} \\ &= 2k + 2a_{nn}\det A_{n-1} - \det A_{n-1} \\ &= 2l - \det A_{n-1} \end{aligned}$$

Do đó, $\det A_n + \det A_{n-1} = 2l$ là số chẵn, Suy ra $\det A_n$ và $\det A_{n-1}$ có cùng tính chẵn lẽ với mọi n, mà $\det A_1 = 2a_{11} - 1$ là số lẽ nên $\det A_n$ là số lẽ và do đó $\det A_n \neq 0$ (vì 0 là số chẵn). Vì hệ phương trình có $\det A_n \neq 0$ nên hệ trên là hệ Cramer và có nghiệm duy nhất là $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

32) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 \\ x_1 + 2x_2 + \cdots + 2^{n-1}x_n = 1 \\ x_1 + 3x_2 + \cdots + 3^{n-1}x_n = 1 \\ \dots \\ x_1 + nx_2 + \cdots + n^{n-1}x_n = 1 \end{cases}$$

Giải: Giả sử $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là nghiệm của hệ phương trình đã cho. Xét đa thức

$$f(X) = x_n X^{n-1} + x_{n-1}X^{n-2} + \cdots + x_2 X + x_1 - 1 = 0$$

Vì $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là nghiệm của hệ nên $X = 1, 2, \ldots, n$ là các nghiệm của đa thức trên. Vì $f(X)$ có bậc $\leqslant n-1$ mà lại có n nghiệm phân biệt nên $f(X) \equiv 0$ ($f(X)$ là đa thức không), do đó ta có $x_n = x_{n-1} = \cdots = x_2 = 0$, $x_1 = 1$. Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x_1 = 1, x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 0$.

33) Chứng minh hệ phương trình

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

trong đó $a_{ij} = -a_{ji}$ và n lẽ, có nghiệm không tầm thường.

Giải: Gọi A là ma trận các hệ số, theo giả thiết $(A)_{ij} = -(A)_{ji}$ do đó $A = A^t$. Do tính chất định thức $\det A = \det A^t$ nên ta có

$$\det A = \det(-A^t) = (-1)^n \det A^t = (-1)^n \det A = -\det A (\text{ do } n \text{ lẽ})$$

Bởi vậy suy ra $\det A = -\det A$ hay $\det A = 0$, tức là $\operatorname{rank} A = r < n$. Theo Định lý Cronecker-Capelly hệ có vô số nghiệm (phụ thuộc $n - r$ tham số) do đó hệ có nghiệm khác $(0, 0, \ldots, 0)$.