GIẢI TÍCH (CƠ SỞ)

Chuyên ngành: **Giải Tích**, **PPDH Toán**

Phần 2. **Không gian định chuẩn Ánh xạ tuyến tính liên tục**

§1. **Không gian định chuẩn**

(Phiên bản đã chỉnh sửa)

PGS TS Nguyễn Bích Huy

Ngày 1 tháng 3 năm 2006

Lý thuyết

1 Chuẩn

Giả sử X là một không gian vectơ (k.g.v.t) trên trường số K ($K = \mathbb{R}$ hoặc $K = \mathbb{C}$). Một ánh xạ $p : X \to \mathbb{R}$ được gọi là *một chuẩn trên* X nếu thỏa mãn các điều kiện sau cho mọi $x, y \in X$, mọi $\lambda \in K$:

i) $p(x) \geq 0$
$p(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \theta$ (θ chỉ *phần tử không* trong X)

ii) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$

iii) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$

Số $p(x)$ gọi là chuẩn của phần tử x.
Thông thường, ta dùng ký hiệu $||x||$ thay cho $p(x)$.

Mệnh đề 1. *Nếu p là một chuẩn trên k.g.v.t X thì ta có:*

1. $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$ (hay $|||x|| - ||y||| \leq ||x - y||$) $\forall x, y \in X$.

2. $d(x, y) := p(x - y)$ là một mêtric trên X, gọi là mêtric sinh bởi chuẩn p (hay $d(x, y) = ||x - y||$)

Ví dụ 1. Trên $\mathbb{R}^n$ ánh xạ

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto ||x|| = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right)^{1/2}$$

là chuẩn, gọi chuẩn Euclide. Mêtric sinh bởi chuẩn này chính là mêtric thông thường của $\mathbb{R}^n$.

Ví dụ 2. Trên $C[a, b]$, ánh xạ $x \mapsto ||x|| := \sup_{a \leq t \leq b} |x(t)|$ là một chuẩn mêtric sinh bởi chuẩn này là *mêtric hội tụ đều* trên $C[a, b]$

2 Không gian định chuẩn

Định nghĩa 1.

- Không gian vectơ X cùng với chuẩn $|| \cdot ||$ trong nó, được gọi là một không gian định chuẩn (kgđc), ký hiệu $(X, || \cdot ||)$.
- Các khái niệm hội tụ, tập mở, đóng, compact, dãy Cauchy, $\cdots$ trong $(X, || \cdot ||)$ được hiểu là các khái niệm tương ứng đối với mêtric sinh bởi chuẩn.

Nói riêng, trong $(X, || \cdot ||)$ ta có

$$B(x_0, r) = \{x \in X : ||x - x_0|| < r\}$$

$$(\lim_{n\to\infty} x_n = x (\text{cũng viết } x_n \xrightarrow{||\cdot||} x)) \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} ||x_n - x|| = 0$$

$$(\{x_n\} \text{ là dãy Cauchy}) \Longleftrightarrow \lim_{n,m\to\infty} ||x_n - x_m|| = 0.$$

Định nghĩa 2. Kgđc $(X, || \cdot ||)$ được gọi là không gian Banach nếu X với mêtric sinh bởi $|| \cdot ||$ là không gian đầy đủ.

Vì kgđc là trường hợp đặc biệt của không gian mêtric nên tất cả các kết quả về không gian mêtric cũng đúng cho kgđc. Ngoài ra, ta có các kết quả sau về kgđc.

Mệnh đề 2. *Cho Kgđc $(X, \|.\|)$ trên trường số K và các dãy $\{x_n\}, \{y_n\} \subset X$, $\{\lambda_n\} \subset K$, $\lim x_n = x, \lim y_n = y, \lim \lambda_n = \lambda$. Khi đó :*

1. $\lim \|x_n\| = \|x\|$

2. $\lim(x_n + y_n) = x + y, \quad \lim \lambda_n x_n = \lambda x.$

Hệ quả. *Các ánh xạ $f, g : X \to X$, $f(x) = x_0 + x$, $g(x) = \lambda_0 x \quad (\lambda_0 \in K \backslash \{0\})$ là đồng phôi.*

3 Chuẩn tương đương

Định nghĩa 3. Hai chuẩn $\|.\|_1, \|.\|_2$ trên kgvt X gọi là tương đương (viết $\|.\|_1 \sim \|.\|_2$) nếu tồn tại các hằng số dương a, b sao cho

$$\|x\|_1 \leq a\|x\|_2 \ , \qquad \|x\|_2 \leq b\|x\|_1 \qquad \forall x \in X$$

Mệnh đề 3. *Giả sử $\|.\|_1, \|.\|_2$ là hai chuẩn tương đương trên kgvt X. Khi đó:*

1. $(\lim x_n = x$ *theo* $\|.\|_1) \Longleftrightarrow (\lim x_n = x$ *theo* $\|.\|_2)$

2. $(X, \|.\|_1)$ *đầy đủ* $\Longleftrightarrow (X, \|.\|_2)$ *đầy đủ.*

4 Một số không gian định chuẩn

4.1 Không gian định chuẩn con

Cho kgđc $(X, \|.\|)$ và X_0 là một kgvt con của X. Ký hiệu $\|.\|_0$ là thu hẹp của $\|.\|$ trên X_0 thì $\|.\|_0$ là một chuẩn trên X_0. Cặp $(X_0, \|.\|_0)$ gọi là kgđc con của $(X, \|.\|)$.

4.2 Tích của hai kgđc

Cho các kgđc $(X_1, \|.\|_1), (X_2, \|.\|_2)$. Tích Đề các $X_1 \times X_2$ sẽ trở thành kgvt nếu ta định nghĩa các phép toán

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \qquad \lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$$

Kgvt $X_1 \times X_2$ với chuẩn

$$\|(x_1, x_2)\| := \|x_1\|_1 + \|x_2\|_2 \qquad (*)$$

hoặc với chuẩn tương đương với (*), gọi là kgđc tích của các kgđc $(X_1, \|.\|_1), (X_2, \|.\|_2)$.

Ta dễ dàng kiểm tra được các tính chất sau:

- Dãy (x_1^n, x_2^n) hội tụ về phần tử (x_1, x_2) trong kgđc tích khi và chỉ khi các dãy $\{x_i^n\}$ hội tụ về x_i trong kgđc $(X_i, \|.\|_i), i = 1, 2$.

- Nếu $(X_i, \|.\|_i)(i = 1, 2)$ là các không gian Banach thì kgđc tích cũng là không gian Banach.

4.3 Kgđc hữu hạn chiều

Giả sử X là kgvt m chiều và $e = \{e_1, \ldots, e_m\}$ là một cơ sở của X. Khi đó ánh xạ

$$x = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k e_k \mapsto \|x\|_e := \left(\sum_{k=1}^{m} |\lambda_k|^2 \right)^{1/2}$$

là một chuẩn, gọi là chuẩn Euclide sinh bởi cơ sở e.

Mệnh đề 4.

1. *Trên một không gian hữu hạn chiều, hai chuẩn bất kỳ luôn tương đương với nhau.*
2. *Trên kgđc hữu hạn chiều, một tập là compact khi và chỉ khi nó đóng và bị chặn.*
3. *Một không gian định chuẩn hữu hạn chiều luôn là không gian đầy đủ. Do đó, một kgvt con hữu hạn chiều của một kgđc là tập đóng trong không gian đó.*

Định lí 1 (Riesz)**.** *Nếu quả cầu $\overline{B}(\theta, 1) := \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ của các kgđc X là tập compact thì X là không gian hữu hạn chiều.*

5 Chuỗi trong kgđc

Nhờ có phép toán cộng và lấy giới hạn, trong kgđc ta có thể đưa ra khái niệm chuỗi phần tử tương tự khái niệm chuỗi số.

Định nghĩa 4. Cho kgđc $(X, \|.\|)$ và dãy $\{x_n\}$ các phần tử của X. Ta nói chuỗi phần tử

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \qquad (**)$$

hội tụ và có tổng bằng x nếu như $x = \lim_{n\to\infty} s_n$, trong đó: $s_1 = x_1, s_n = x_1 + \cdots + x_n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

- Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ hội tụ thì ta nói chuỗi (**) hội tụ tuyệt đối.

Mệnh đề 5. *Nếu X là không gian Banach thì mọi chuỗi hội tụ tuyệt đối là chuỗi hội tụ*

Bài tập

Bài 1. Ký hiệu $C^1_{[a,b]}$ là không gian các hàm thực $x = x(t)$ có đạo hàm liên tục trên $[a, b]$. $C^1_{[a,b]}$ là kgvt trên $\mathbb{R}$ với các phép toán thông thường về cộng hai hàm và nhân hàm với số thực. Ta định nghĩa $p_1(x) = |x(a)| + \sup\limits_{a\le t\le b} |x'(t)|$, $p_2(x) = \sup\limits_{a\le t\le b} |x(t)|$, $p_3(x) = \sup\limits_{a\le t\le b} \{|x(t)| + |x'(t)|\}$

1. Chứng minh p_1, p_2, p_3 là các chuẩn trên $C^1_{[a,b]}$.
2. Chứng minh $p_2 \not\sim p_3$
3. Chứng minh $p_1 \sim p_3$

Giải.

1. Để làm ví dụ, ta kiểm tra p_1 là chuẩn.

   i) Hiển nhiên ta có $p_1(x) \ge 0\ \forall x \in C^1_{[a,b]}$; hơn nữa

   $$p_1(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x(a) = 0 \\ x'(t) = 0 \quad \forall t \in [a, b] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(a) = 0 \\ x(t) \text{ là hàm hằng số} \end{cases} \Leftrightarrow x(t) = 0 \forall t \in [a, b].$$

   ii) $p_1(\lambda x) = |\lambda x(a)| + \sup\limits_{a\le t\le b} |\lambda x'(t)| = |\lambda| \left(|x(a)| + \sup\limits_{a\le t\le b} |x'(t)| \right) = |\lambda| p_1(x)$

   iii) Với $x, y \in C^1_{[a,b]}$ ta có

   $$\begin{aligned} |x(a) + y(a)| + |(x(t) + y(t))'| &\le |x(a)| + |y(a)| + |x'(t)| + |y'(t)| \\ &\le p_1(x) + p_1(y) \qquad \forall t \in [a, b] \end{aligned}$$

   $\Longrightarrow p_1(x + y) \le p_1(x) + p_1(y)$.

2. Dễ thấy $p_2(x) \le p_3(x)\ \forall x \in C^1_{[a,b]}$. Ta sẽ chứng minh không tồn tại số $c > 0$ sao cho

   $$p_3(x) \le c p_2(x) \qquad \forall x \in C^1_{[a,b]} \qquad (*)$$

   Xét dãy $x_n(t) = (t - a)^n,\ n \in \mathbb{N}^*$. Dễ dàng tính được:

   $$\begin{aligned} p_2(x_n) &= (b - a)^n \\ p_3(x_n) &= (b - a)^n + n(b - a)^{n-1} \end{aligned}$$

   Do đó, nếu tồn tại $c > 0$ để (*) đúng thì ta có

   $$\begin{aligned} & (b - a)^n + n(b - a)^{n-1} && \le c(b - a)^n && \forall n = 1, 2, \cdots \\ \Rightarrow\ & b - a + n && \le c(b - a) && \forall n = 1, 2, \cdots \end{aligned}$$

   Ta gặp mẫu thuẫn.

3. • Ta dễ dàng kiểm tra $p_1(x) \le p_3(x)\ \forall x \in C^1_{[a,b]}$

   • Mặt khác ta có:
   $$\begin{aligned} |x(t)| &\le |x(a)| + |x(t) - x(a)| = |x(a)| + |x'(c)(t-a)| (\text{áp dụng định lý Lagrange}) \\ &\le |x(a)| + (b-a) \sup_{a \le t \le b} |x'(t)| \\ &\le M p_1(x) \quad \forall t \in [a,b] \quad (M = \max\{1, b-a\}) \\ |x'(t)| &\le p_1(x) \quad \forall t \in [a,b]. \end{aligned}$$
   Do đó $p_3(x) \le (M+1)p_1(x) \quad \forall x \in C^1_{[a,b]}$.

   Vậy $p_1 \sim p_3$.

Bài 2. Ký hiệu l_2 là không gian các dãy số thực $x = \{\lambda_k\}_k$ thỏa mãn điều kiện $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 < \infty$ với các phép toán thông thường về cộng hai dãy số và nhân dãy số với số thực. Trên l_2 ta xét chuẩn $\|x\| = \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2\right)^{1/2}$ nếu $x = \{\lambda_k\} \in l_2$

1. Xét các dãy số $e_n = \{\delta_{n,k}\}_k$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ trong đó $\delta_{n,k} = 1$ nếu $n = k, \delta_{n,k} = 0$ nếu $n \ne k$. Chứng minh rằng nếu $x = \{\lambda_k\} \in l_2$ thì $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$

2. Chứng minh l_2 đầy đủ.

Giải.

1. Đặt $s_n = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$, ta cần chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = x$

   Ta có:
   $$\begin{aligned} s_n &= (\lambda_1, \cdots, \lambda_n, 0, 0, \cdots) \\ \Rightarrow x - s_n &= (0, \cdots, 0, \lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}, \cdots), \quad \|x - s_n\| = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k^2\right)^{1/2} \end{aligned}$$
   Vì chuỗi $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2$ hội tụ nên $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k^2 = 0$.

   Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} \|x - s_n\| = 0$ (đpcm).

2. Giả sử $\{x_n\}$ là dãy Cauchy trong $l_2, x_n = \{\lambda_k^n\}_k, n \in \mathbb{N}^*$.

   • Với mỗi $k \in \mathbb{N}^*$, ta có:
   $$|\lambda_k^n - \lambda_k^m| \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k^n - \lambda_k^m|^2\right)^{1/2} = \|x_n - x_m\| \qquad (1)$$

và $\{x_n\}$ là dãy Cauchy nên $\{\lambda_k^n\}_n$ là dãy Cauchy trong $\mathbb{R}$, do đó hội tụ.

Đặt $a_k = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda_k^n$ $(k \in \mathbb{N}^*)$ và lập dãy số $a = \{a_k\}$

- Tiếp theo ta sẽ chứng minh $a \in l_2$ và $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - a\| = 0$

  Cho $\varepsilon > 0$ tùy ý. Do $\{x_n\}$ là dãy Cauchy ta có n_0 thỏa mãn

$$\forall n, m \in \mathbb{N}^*, \quad n, m \geq n_0 \Rightarrow \|x_n - x_m\| < \varepsilon. \tag{1}$$

  Từ (1) ta có

$$\sum_{k=1}^{N} |\lambda_k^n - \lambda_k^m|^2 < \varepsilon^2 \qquad \forall N \in \mathbb{N}^*, \forall n, m \geq n_0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{N} |\lambda_k^n - a_k|^2 \leq \varepsilon^2 \qquad \forall N \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0 (\text{ta đã cho } m \to \infty \text{ trong bđt trên}) \tag{2}$$

$$\Rightarrow \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k^n - a_k|^2 \leq \varepsilon^2 \quad \forall n \geq n_0$$

  Từ (2) ta suy ra $x_n - a \in l_2$ $(n \geq n_0)$ và do đó $a = x_n - (x_n - a)$ cũng thuộc l_2. Hơn nữa, ta đã chứng minh:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \Longrightarrow \|x_n - a\| \leq \varepsilon$$

  hay là $\lim \|x_n - a\| = 0$

Ghi chú

Ở trên ta không kiểm tra l_2 là kgvt và các điều kiện của chuẩn. Để làm ví dụ, ta sẽ chứng minh rằng nếu $x = \{\lambda_k\} \in l_2, y = \{\alpha_k\} \in l_2$ thì $x + y \in l_2$ và $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. Thật vậy, ta có theo bất đẳng thức Bunhiakowski:

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{k=1}^{N} (\lambda_k + \alpha_k)^2 &= \textstyle\sum_{k=1}^{N} \lambda_k^2 + 2\sum_{k=1}^{N} \lambda_k \alpha_k + \sum_{k=1}^{N} \alpha_k^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|.\|y\| + \|y\|^2 \qquad \forall N \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Cho $N \to \infty$ ta có đpcm.

Bài 3. Gọi m là không gian các dãy số thực $x = \{\lambda_k\}_k$ bị chặn với chuẩn $\|x\| = \sup\{|\lambda_k| : k \in \mathbb{N}^*\}$.

1. Chứng minh m là không gian Banach.
2. Ký hiệu $\mathcal{C}$ là tập hợp các dãy số hội tụ. Chứng minh $\mathcal{C}$ là không gian con đóng của m.

Giải. 1. Giả sử $\{x_n\}$ là dãy Cauchy trng $m, x_n = \{\lambda_k^n\}_k, n \in N^*$

- Với mỗi $k \in \mathbb{N}^*$, ta có:

$$|\lambda_k^n - \lambda_k^m| \leq \sup\{|\lambda_k^n - \lambda_k^m| : k \in \mathbb{N}^*\} = \|x_n - x_m\|$$

  và do $\{x_n\}$ là dãy Cauchy nên $\{\lambda_k^n\}_n$ là dãy Cauchy trong $\mathbb{R}$và do vậy, hội tụ.

  Đặt $a_k = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda_k^n$ và lập dãy số $a = \{a_k\}_k$.

- Ta chứng minh $a \in m$ và $\lim \|x_n - a\| = 0$

  Cho $\varepsilon > 0$, ta tìm được n_0 sao cho

$$\forall n, m \geq n_0 \Rightarrow \|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

  Ta có:

$$\begin{array}{rll} |\lambda_k^n - \lambda_k^n| & < \varepsilon & \forall k \in \mathbb{N}^*, \forall n, m \geq n_0 \\ \Rightarrow \quad |\lambda_k^n - a_k| & \leq \varepsilon & \forall k \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0 (\text{cho } m \to \infty \text{ trong bđt trên}) \\ \Rightarrow \quad \sup\limits_k |\lambda_k^n - a_k| & \leq \varepsilon & \forall n \geq n_0. \end{array}$$

Như vậy, ta đã chứng minh:

* $(x_n - a) \in m$, do đó $a = x_n - (x_n - a) \in m$.
* $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \Rightarrow \|x_n - a\| \leq \varepsilon$
  hay $\lim \|x_n - a\| = 0$.

2. Giả sử ta có dãy $\{x_n\} \subset \mathcal{C}, x_n = \{\lambda_k^n\}_k$ mà x_n hội tụ về $a = \{a_k\} \in m$ ta cần chứng minh $a \in \mathcal{C}$. Muốn vậy, ta chỉ cần chứng minh a là dãy Cauchy.

   Cho $\varepsilon > 0$, ta tìm được n' sao cho

$$\sup_k |\lambda_k^{n'} - a_k| = \|x_{n'} - a\| < \varepsilon/3 (\text{do } a = \lim x_n \text{ trong } m)$$

   Vì $x_{n'} = \{\lambda_k^{n'}\}_k \in \mathcal{C}$ nên nó là dãy Cauchy, do đó có k_0 sao cho:

$$\forall k, l \geq k_0 \Rightarrow |\lambda_k^{n'} - \lambda_l^{n'}| < \varepsilon/3.$$

   Với k_0 này, ta có:

$$\begin{aligned} \forall k, l \geq k_0 \Rightarrow |a_k - a_l| & \leq |a_k - \lambda_k^{n'}| + |\lambda_k^{n'} - \lambda_l^{n'}| + |\lambda_l^{n'} - a_l| \\ & < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon \end{aligned}$$

   Vậy $\{a_k\}$ là dãy Cauchy (đpcm).

Bài 4. Cho kgđc X và các tập $A, B \subset X$ khác $\emptyset$. Chứng minh

1. Nếu A mở thì $A + B$ mở
2. Nếu A, B compact thì $A + B$ compact.
3. Nếu A đóng, B compact thì $A + B$ đóng

Giải.

1. Trước tiên ta chứng minh rằng $\forall b \in B$ thì $A + b$ là tập mở.

   Thật vậy, ánh xạ $f : X \to X, f(x) = x + b$ là đồng phôi nên

   $$A \text{ mở } \Rightarrow f(A) \text{ mở hay } A + b \text{ mở}$$

   Do $A + B = \bigcup_{b \in B}(A + b)$ nên $A + B$ mở.

2. Xét tùy ý dãy $\{x_n\} \subset A + B$, ta chứng minh $\{x_n\}$ có dãy con hội tụ về phần tử thuộc $A + B$.

   Ta có: $\qquad x_n = a_n + b_n$ với $a_n \in A, b_n \in B$.

   Do A compact nên $\{a_n\}$ có dãy con $\{a_{n_k}\}_k$ hội tụ về một $a \in A$. Do B compact nên dãy $\{b_{n_k}\}_k$ có dãy con $\{b_{n_{k_l}}\}_l$ hội tụ về $b \in B$. Tương ứng với dãy $\{b_{n_{k_l}}\}_l$ ta có dãy $\{a_{n_{k_l}}\}_l$ vẫn hội tụ về a.

   Suy ra dãy con $x_{n_{k_l}} = a_{n_{k_l}} + b_{n_{k_l}}$ hội tụ về $a + b$ (đpcm).

   Ghi chú: Câu này có thể giải như sau:

   Xét kgđc tích $X \times X$ và ánh xạ $f : X \times X \to X$, $f(x, y) = x + y$. Ta có:

   (f liên tục, $A \times B$ là tập compact trong $X \times X$) $\Longrightarrow f(A \times B)$ là tập compact trong X.

   Do $f(A \times B) = A + B$ ta có đpcm.

3. Xét dãy tùy ý $\{x_n\} \subset A + B$, $x_n = a_n + b_n, a_n \in A, b_n \in B$ mà $\lim x_n = x$, ta cần chứng minh $x \in A + B$

   Do B compact nên $\{b_n\}$ có dãy con $\{b_{n_k}\}$ hội tụ về một $b \in B$. Khi đó $a_{n_k} = x_{n_k} - b_{n_k}$ hội tụ về $x - b$ và vì A đóng nên $x - b \in A$.

   Ta có $x = (x - b) + b$ nên $x \in A + B$ (đpcm).

Bài 5. Cho kgđc $(X, \|.\|)$ và X_0 là không gian con hữu hạn chiều của X. Chứng minh tồn tại $x_0 \in X_0$ sao cho

$$\|a - x_0\| = \inf_{x \in X_0} \|a - x\|$$

Giải. Đặt $d = \inf\{\|a - x\| : x \in X_0\}$ và chọn dãy $\{x_n\} \subset X_0$ thỏa mãn $\lim \|a - x_n\| = d$.

Ta có: $\|x_n\| \leq \|a\| + \|a - x_n\|$ nên $\{x_n\}$ bị chặn

$$\exists M > 0 : \{x_n\} \subset \overline{B}(\theta, M)$$

Tập $\overline{B}(\theta, M) \cap X_0$ compact (do $\dim X_0 < \infty$) nên $\{x_n\}$ có dãy con $\{x_{n_k}\}$ hội tụ về $x_0 \in X_0$. Khi đó:

$$\begin{aligned} d &= \lim_{k \to \infty} \|a - x_{n_k}\| \quad (\text{vì } \{\|a - x_{n_k}\|\}_k \text{ là dãy con của } \{\|a - x_n\|\}) \\ &= \|a - x_0\| \end{aligned}$$

Ghi chú: Bài này còn có thể giải bằng cách tìm số $M > 0$ sao cho

$$\inf_{x\in X_0} \|a - x\| = \inf_{x\in X_0\cap \overline{B}(\theta,M)} \|a - x\|$$

Sau đó sử dụng tính compact của tập $X_0 \cap \overline{B}(\theta, M)$ và tính liên tục của hàm $x \mapsto \|a - x\|$

Bài 6. Cho kgđc X và $A \subset X$ là tập lồi. Chứng minh tác tập $\overline{A}, \operatorname{Int} A$ cũng lồi.

Giải (Hướng dẫn)**.** Cố định số $t \in (0, 1)$

- Để chứng minh $t\overline{A} + (1 - t)\overline{A} \subset \overline{A}$ ta dùng liên hệ giữa điểm dính và sự hội tụ.
- Để chứng minh $t \operatorname{Int} A + (1 - t) \operatorname{Int} A \subset \operatorname{Int} A$ chỉ cần kiểm tra vế trái là tập mở, chứa trong A.

Bài 7. Giả sử trong kgđc X, tập $S = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ là compact. Chứng minh $\dim X < \infty$.

Giải. Xét ánh xạ $f : K \times X \to X$, $f(\lambda, x) = \lambda x$. Khi đó, quả cầu $\overline{B}(0, 1)$ là ảnh của một tập compact qua ánh xạ f.