ĐẠI SỐ CƠ BẢN
(ÔN THI THẠC SĨ TOÁN HỌC)
Bài 10. Không gian vectơ

PGS TS Mỵ Vinh Quang

Ngày 18 tháng 3 năm 2005

1 Các khái niệm cơ bản

1.1 Định nghĩa không gian vectơ

Ký hiệu $\mathbb{R}$ là tập các số thực, V là tập tùy ý khác $\varnothing$. V gọi là không gian vectơ (trên $\mathbb{R}$) (mỗi phần tử của V gọi là một vectơ) nếu trong V có 2 phép toán:

- Phép cộng 2 vectơ, tức là với mỗi cặp vectơ $\alpha, \beta \in V$ xác định được một vectơ tổng $\alpha + \beta \in V$.
- Phép nhân vô hướng một số với một vectơ, tức là với mỗi $a \in \mathbb{R}$ và vectơ $\alpha \in V$ xác định được một vectơ tích $a\alpha \in V$.

Ngoài ra, phép cộng và phép nhân trên phải thỏa mãn 8 điều kiện sau:

1. Phép cộng kết hợp; với mọi $\alpha, \beta, \gamma \in V$:
   $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$
2. Phép cộng giao hoán, với mọi $\alpha, \beta \in V$:
   $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
3. Phép cộng có vectơ-không, tồn tại vectơ $O \in V$ (vectơ-không) có tính chất:
   $\alpha + O = O + \alpha = \alpha$ với mọi $\alpha \in V$
4. Có vectơ đối, với mọi vectơ $\alpha \in V$, tồn tại vectơ $-\alpha \in V$ (vectơ đối của α) có tính chất:
   $\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = O$
5. Phép nhân phân phối với phép cộng, với mọi $a \in \mathbb{R}$ và các vectơ $\alpha, \beta \in V$:
   $a(\alpha + \beta) = a\alpha + a\beta$
6. Phép nhân phân phối với phép cộng, với mọi số thực $a, b \in \mathbb{R}$, mọi vectơ $\alpha \in V$:
   $(a + b)\alpha = a\alpha + b\alpha$
7. Phép nhân kết hợp. Với mọi $a, b \in \mathbb{R}$, với mọi vectơ $\alpha \in V$:
   $(ab)\alpha = a(b\alpha)$

8. $1.\alpha = \alpha$ với mọi vectơ $\alpha \in V$

Như vậy, để kiểm tra tập hợp V cùng với 2 phép toán cộng và nhân vô hướng có phải là không gian vectơ hay không, ta phải kiểm tra xem chúng có thỏa mãn 8 điều kiện trên hay không. Bạn đọc có thể dễ dàng tự kiểm tra các ví dụ sau.

1.2 Các ví dụ về không gian vectơ

1. $V = \mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_i \in \mathbb{R}\}$ với:

   - Phép cộng: $\alpha = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $\beta = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$:

   $\alpha + \beta = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n) \in \mathbb{R}^n$

   - Phép nhân vô hướng: với mọi $a \in \mathbb{R}$, $a.\alpha = a(a_1, \ldots, a_n) = (aa_1, \ldots, aa_n)$
   thì V là một không gian vectơ.

2. $V = M_{m \times n}(\mathbb{R})$ - tập các ma trận cấp $m \times n$ với hệ số thực - với phép cộng là phép cộng 2 ma trận, phép nhân vô hướng là phép nhân một số thực với một ma trận, là một không gian vectơ.

3. $\mathbb{R}[x]$ - tập các đa thức với hệ số thực - với phép cộng là phép cộng hai đa thức, phép nhân vô hướng là phép nhân một số với một đa thức, là không gian vectơ.

4. $\mathbb{R}^+$ là tập các số thực dương. Trong $\mathbb{R}^+$ ta định nghĩa phép cộng và phép nhân vô hướng.

   - Phép cộng: với mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, $\alpha \oplus \beta = \alpha\beta$

   - Phép nhân vô hướng: với mọi $a \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}^+ : a * \alpha = \alpha^a$

   Khi đó, $(\mathbb{R}^+, \oplus, *)$ là một không gian vectơ với vectơ-không là 1, vectơ đối của vectơ α là vectơ $\dfrac{1}{\alpha}$

1.3 Các tính chất cơ bản

1. Vectơ O và vectơ đối $(-\alpha)$ là duy nhất.

2. Phép cộng có luật giản ước: với mọi $\alpha, \beta, \gamma \in V$, nếu $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$ thì $\beta = \gamma$

3. $0.\alpha = O$, với mọi $\alpha \in V$,

   $a.O = O$, với mọi $a \in \mathbb{R}$,

   $(-1).\alpha = -\alpha$ với mọi $\alpha \in V$

4. Nếu $a.\alpha = O$ thì $a = 0$ hoặc $\alpha = O$

5. Nếu $\alpha \neq O$ thì $a\alpha = b\alpha \Leftrightarrow a = b$

6. $(-a)\alpha = a(-\alpha) = -(a\alpha)$ với mọi $a \in \mathbb{R}$, $\alpha \in V$

2 Độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính

2.1 Các khái niệm cơ bản

Cho V là không gian vectơ, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ là một hệ vectơ của V.

- Hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ gọi là hệ vectơ phụ thuộc tuyến tính (PTTT) nếu tồn tại các số thực $a_1, a_2, \ldots, a_n$ không đồng thời bằng 0 sao cho
$$a_1\alpha_1 + \cdots + a_n\alpha_n = O$$
tức là phương trình vectơ $x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n = O$ có nghiệm khác $(0, \ldots, 0)$

- Hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ gọi là hệ vectơ độc lập tuyến tính (ĐLTT) nếu nó không phụ thuộc tuyến tính, nói cách khác hệ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ĐLTT khi và chỉ khi: nếu $a_1\alpha_1 + \cdots + a_n\alpha_n = O$ với $a_i \in \mathbb{R}$ thì $a_i = 0$ với mọi i, tức là phương trình vectơ $x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n = O$ có nghiệm duy nhất là $(0, \ldots, 0)$

Ví dụ. Trong $\mathbb{R}^4$ cho hệ vectơ $\alpha_1 = (1, 0, 1, 1)$, $\alpha_2 = (0, 1, 2, 3)$, $\alpha_3 = (1, 2, 3, 4)$. Hệ trên ĐLTT hay PTTT?

Giải. Xét hệ phương trình vectơ

$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = O$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Ma trận các hệ số của hệ trên là $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Dễ thấy $\operatorname{rank} A = 3$ nên hệ trên có nghiệm duy nhất $(0, 0, 0)$. Vậy hệ vectơ trên độc lập tuyến tính.

Nhận xét. Để xét hệ m vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ ĐLTT hay PTTT trong $\mathbb{R}^n$, ta lập ma trận A với các cột là các vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ rồi tìm $\operatorname{rank} A$. Nếu $\operatorname{rank} A = m$ (số vectơ) thì hệ ĐLTT, nếu $\operatorname{rank} A < m$ thì hệ PTTT.

- Vectơ $\beta \in V$ gọi là biểu thị tuyến tính (BTTT) được qua hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ nếu tồn tại các số $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ sao cho $\beta = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_n\alpha_n$ (tức là phương trình vectơ $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$ có nghiệm)

2.2 Các tính chất cơ bản

1. Hệ chức vectơ-không luôn PTTT.
2. Hệ gồm 1 vectơ PTTT khi và chỉ khi vectơ đó bằng O, hệ gồm 2 vectơ PTTT khi và chỉ khi 2 vectơ đó tỷ lệ.
3. Nếu một hệ ĐLTT thì mọi hệ con của nó cũng ĐLTT.
4. Hệ vectơ $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ PTTT khi và chỉ khi có một vectơ trong hệ biểu thị tuyến tính được qua các vectơ còn lại của hệ.
5. Nếu hệ $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ĐLTT thì hệ vectơ $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta$ ĐLTT khi và chỉ khi β không biểu thị tuyến tính được qua hệ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

3 Hạng của một hệ vectơ

3.1 Hệ vectơ tương đương

Trong không gian vectơ V cho hai hệ vectơ:
(α) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$
(β) $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$

Ta nói hệ (α) biểu thị tuyến tính được qua hệ (β) nếu mỗi vectơ của hệ (α) đều biểu thị tuyến tính được qua hệ (β).

Ta nói hệ (α) tương đương với hệ (β) (ký hiệu $(\alpha) \sim (\beta)$) nếu hệ (α) biểu thị tuyến tính được qua hệ (β) và ngược lại.

Từ định nghĩa, ta có ngay quan hệ $\sim$ là một quan hệ tương đương.

3.2 Hệ con độc lập tuyến tính tối đại của một hệ vectơ

Trong không gian vectơ V cho hệ vectơ (α) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$. Hệ con $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_k}$ của hệ (α) gọi là hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ (α) nếu $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_k}$ độc lập tuyến tính và mọi vectơ α_i của hệ (α) đều biểu thị tuyến tính được qua hệ con $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_k}$

Từ định nghĩa, ta có ngay hệ con độc lập tuyến tính của một hệ vectơ tương đương với hệ vectơ đó.

3.3 Bổ đề cơ bản về sự độc lập tuyến tính

Trong không gian vectơ V cho hai hệ vectơ
(α) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$
(β) $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$

Nếu hệ (α) độc lập tuyến tính và biểu thị tuyến tính được qua hệ (β) thì $m \leq n$, và ta có thể thay m vectơ của hệ (β) bằng các vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ của hệ (α) để được hệ mới tương đương với hệ (β).

Từ bổ đề cơ bản, ta có ngay hai hệ vectơ ĐLTT tương đương thì có số vectơ bằng nhau.

3.4 Hạng của hệ vectơ

Trong không gian vectơ V, cho hệ vectơ (α) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$

Hệ (α) có thể có nhiều hệ con độc lập tuyến tính tối đại khác nhau. Tuy nhiên tất cả các hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ (α) đều tương đương với nhau (vì chúng cùng tương đương với hệ (α)). Do đó, theo bổ đề cơ bản, tất cả các hệ con độc lập tuyến tính tối đại đều có số vectơ bằng nhau. Số đó gọi là *hạng của hệ vectơ* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$; ký hiệu $\mathrm{rank}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$

Như vậy ta có
$\mathrm{rank}\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\} =$ Số vectơ của hệ con độc lập tuyến tính của hệ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$

3.5 Cách tìm hạng, hệ con độc lập tuyến tính tối đại của một hệ vectơ

Trong $\mathbb{R}^n$ cho hệ vectơ
$\alpha_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})$
$\alpha_2 = (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n})$
....

$\alpha_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$
Để tìm hạng, hệ con độc lập tuyến tính tối đại của của hệ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ ta làm như sau:

- Lập ma trận A là ma trận dòng của các vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$
  $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$
- Bằng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng, đưa ma trận A về dạng bậc thang. Khi đó:

  $\operatorname{rank}\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\} = \operatorname{rank} A$

  Hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ bao gồm các vectơ ứng với các dòng khác không của ma trận bậc thang.

Ví dụ. Trong $\mathbb{R}^5$ cho hệ vectơ
$\alpha_1 = (3, 2, 0, 1, 4)$
$\alpha_2 = (4, 1, 0, 2, 3)$
$\alpha_3 = (3, 1, -1, 0, 1)$
$\alpha_4 = (1, 0, 1, 2, 2)$
Tìm một hệ con độc lập tuyến tính và hạng của hệ vectơ trên.

Giải
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{matrix}$$
$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -6 & -5 \\ 0 & 1 & -4 & -6 & -5 \\ 0 & 2 & -3 & -5 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{matrix}$$
$\operatorname{rank} A = 3$
Do đó, $\operatorname{rank}\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} = 3$
Hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ là $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4\}$.

Bài tập

1. Xét xem $\mathbb{R}^2$ có là không gian vectơ hay không? với phép cộng và phép nhân vô hướng sau:

   $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$

   $a(a_1, a_2) = (aa_1, 0)$

2. Chứng minh rằng một không gian vectơ hoặc chỉ có một vectơ, hoặc có vô số vectơ.

3. Xét sự độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính. Tìm hạng và hệ con độc lập tuyến tính tối đại của các hệ sau:

   (a) $\alpha_1 = (1, 0, -1, 0)$, $\alpha_2 = (1, 2, 1, 1)$, $\alpha_3 = (3, 2, 3, 2)$, $\alpha_4 = (1, 1, 2, 1)$

   (b) $\alpha_1 = (1, 0, 0, -1)$, $\alpha_2 = (2, 1, 1, 0)$, $\alpha_3 = (1, 1, 1, 1)$, $\alpha_4 = (1, 2, 3, 4)$, $\alpha_5 = (0, 1, 2, 3)$

4. Cho hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ ĐLTT trong không gian vectơ V. Chứng minh:

   (a) Hệ vectơ $\beta_1 = \alpha_1$, $\beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2$, $\ldots$, $\beta_m = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m$ cũng ĐLTT.

   (b) Hệ vectơ

   $\gamma_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1m}\alpha_m$

   $\gamma_2 = a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{2m}\alpha_m$

   ....

   $\gamma_m = a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \cdots + a_{mm}\alpha_m$

   độc lập tuyến tính khi và chỉ khi $\det A \neq 0$, trong đó

   $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

5. Hệ vectơ $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ biểu thị tuyến tính được qua hệ vectơ $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$. Chứng minh rằng:

   $\operatorname{rank}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \leq \operatorname{rank}\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m\}$

6. Cho hai hệ vectơ cùng hạng. Hệ đầu biểu thị tuyến tính được qua hệ sau. Chứng minh hai hệ vectơ đã cho tương đương.

7. Trong $\mathbb{R}^4$ cho hệ vectơ:

   $u_1 = (1, 1, 1, 1)$, $u_2 = (2, 3, -1, 0)$, $u_3 = (-1, -1, 1, 1)$

   Tìm điều kiện cần và đủ để vectơ $u = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ biểu thị tuyến tính được qua hệ u_1, u_2, u_3.