GIẢI TÍCH (CƠ SỞ)

Chuyên ngành: **Giải Tích**, **PPDH Toán**

Phần 2. **Không gian định chuẩn Ánh xạ tuyến tính liên tục**

§2. **Ánh Xạ Tuyến Tính Liên Tục**

(Phiên bản đã chỉnh sửa)

PGS TS Nguyễn Bích Huy

Ngày 1 tháng 3 năm 2006

PHẦN LÝ THUYẾT

1. **Sự liên tục của của ánh xạ tuyến tính :**
   Ánh xạ tuyến tính liên tục giữa các không gian định chuẩn có tất cả các tính chất của một ánh xạ liên tục giữa các không gian metric. Ngoài ra nó còn có các tính chất đặc biệt nêu trong định lý sau :
   Định lý 1 :
   Giả sử X, Y là các không gian định chuẩn trên cùng một trường số và $A: \quad X \longrightarrow Y$ là một ánh xạ tuyến tính. Các mệnh đề sau là tương đương :

   (a) A liên tục tại một điểm nào đó của X.

   (b) A liên tục trên X.

   (c) Tồn tại số $M > 0$ sao cho $\|A(x)\|_Y \leqslant M||x||_X \qquad \forall x \in X$

2. **Chuẩn của ánh xạ tuyến tính liên tục. Không gian** $L(X, Y)$

   (a) Nếu $A : (X, ||.||_X) \longrightarrow (Y, ||.||_Y)$ là ánh xạ tuyến tính liên tục thì ta định nghĩa chuẩn của A bởi :
   $$||A|| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{||A(x)||_Y}{||x||_X}$$
   Từ định nghĩa này, ta dễ thấy các tính chất sau :

   i. $||A|| = \sup_{||x||_X \leq 1} ||A(x)||_Y = \sup_{||x||_X = 1} ||A(x)||_Y$

ii. Nếu A tuyến tính liên tục thì $||A(x)||_Y \leqslant ||A||.||x||_X, \quad \forall x \in X$

iii. Nếu A tuyến tính và tồn tại số dương M sao cho $||A(x)||_Y \leqslant M.||x||_X, \quad \forall x \in X$ thì A liên tục và $||A|| \leqslant M$

(b) Ta ký hiệu $L(X, Y)$ là tập tất cả các ánh xạ tuyến tính liên tục từ X vào Y. $L(X, Y)$ trở thành không gian định chuẩn nếu ta định nghĩa chuẩn của mỗi $A \in L(X, Y)$ như trên và các phép toán như sau :

$$(A + B)(x) = A(x) + B(x)$$
$$(\lambda A)(x) = \lambda A(x), \quad x \in X$$

Định lý 2 :
Nếu Y là không gian Banach thì $L(X, Y)$ là không gian Banach.

3. **Phiếm hàm tuyến tính liên tục**

- Một ánh xạ tuyến tính từ không gian định chuẩn X vào trường số $\mathbb{K}$ cũng còn gọi là một phiếm hàm tuyến tính.
  Định lý 3 :
  Cho $f : \quad (X, ||.||) \longrightarrow \mathbb{K}$ là phiếm hàm tuyến tính. Các mệnh đề sau là tương đương :
  (a) f liên tục tại một điểm nào đó của X.
  (b) f liên tục trên X.
  (c) $\exists M > 0 : |f(x)| \leqslant M.||x|| \qquad \forall x \in X$
  (d) $Kerf = \{x \in X : f(x) = 0\}$ là không gian con đóng.
- Không gian $L(X, \mathbb{K})$ tất cả các phiếm hàm tuyến tính liên tục trên X thường ký hiệu là X^* và gọi là không gian liên hợp của X. Từ **định lý 2** ta có X^* là không gian Banach với chuẩn
$$||f|| = \sup_{x \neq \theta} \frac{|f(x)|}{||x||}$$

PHẦN BÀI TẬP

Bài 1
Cho các không gian định chuẩn $(X, ||.||_X), (Y, ||.||_Y)$ với $\dim X = n$ và $A : \quad X \longrightarrow Y$ là ánh xạ tuyến tính. Chứng minh :

1. A liên tục.
2. Tồn tại diểm $x_o \in X$ sao cho :

$$||x_o||_X = 1, \qquad ||A|| = ||A(x_o)||_Y$$

Giải

1. Giả sử $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ là một cơ sở của X và $||.||_e$ là chuẩn Euclide sinh bởi cơ sở e (xem§1). Với $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$, ta có :

$$||A(x)||_Y \leq \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|.||A(e_k)|| \leq \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{||x||_e} . \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} ||A(e_k)||^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{M}$$

Như vậy tồn tại số $M \geq 0$ thỏa mãn :

$$||A(x)||_Y \leq M.||x||_e$$

Vì X hữu hạn chiều nên $||.||_e \sim ||.||_X$ và có số $a > 0$ sao cho :

$$||x||_e \leq a||x||_X, \qquad \forall x \in X.$$

Từ đây ta có :

$$||A(x)||_Y \leq Ma||x||_X, \qquad \forall x \in X$$

Do đó A liên tục.

2. Ta có :

$$||A|| = \sup_{||x||_X = 1} ||A(x)||_Y,$$

ánh xạ $\quad x \longmapsto ||A(x)||_Y \quad$ liên tục trên $(X, ||.||_X)$, tập $S = \{x \in X : ||x||_X = 1\}$ là tập compắc trong $(X, ||.||_X)$ (Vì X hữu hạn chiều).
Do đó tồn tại $x_o \in S$ sao cho $||A(x_o)||_Y = \sup\limits_{x \in S} ||A(x)||_Y \quad$ (đpcm)

Bài 2

Cho các không gian định chuẩn $(X_1, ||.||_1), \quad (X_2, ||.||_2), \quad (Y, ||.||_Y)$ và các ánh xạ tuyến tính liên tục $A_k : X_k \longrightarrow Y, \quad k = 1, 2$. Trên không gian định chuẩn tích $X_1 \times X_2$ ta xét chuẩn $||(x_1, x_2)|| = ||x_1||_1 + ||x_2||_2$ và xét ánh xạ

$$\begin{aligned} A :& X_1 \times X_2 \longrightarrow Y \\ & A(x_1, x_2) = A_1(x_1) + A_2(x_2), \qquad (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2. \end{aligned}$$

Chứng minh A tuyến tính liên tục và $||A|| = max(||A_1||, ||A_2||)$

Giải

Đặt $M = max(||A_1||, ||A_2||)$

- Với $x = (x_1, x_2), x' = (x'_1, x'_2) \in X_1 \times X_2, \quad \alpha, \alpha' \in K$, ta có :

$$\begin{aligned} \alpha x + \alpha' x' &= (\alpha x_1 + \alpha' x'_1, \alpha x_2 + \alpha' x'_2) \\ \Rightarrow A(\alpha x + \alpha' x') &= A_1(\alpha x_1 + \alpha' x'_1) + A_2(\alpha x_2 + \alpha' x'_2) \\ &= \alpha A_1(x_1) + \alpha' A_1(x'_1) + \alpha A_2(x_2) + \alpha' A_2(x'_2) \\ &= \alpha[A_1(x_1) + A_2(x_2)] + \alpha'[A_1(x'_1) + A_2(x'_2)] \\ &= \alpha A(x) + \alpha' A(x') \end{aligned}$$

Vậy A là ánh xạ tuyến tính.

-
$$\begin{aligned}||A(x_1,x_2)||_Y &= ||A_1(x_1)+A_2(x_2)||_Y\\ &\le ||A_1(x_1)||_Y+||A_2(x_2)||_Y\\ &\le ||A_1||.||x_1||_1+||A_2||.||x_2||_2 \qquad \text{(do } A_1, A_2 \text{ liên tục)}\\ &\le M(||x_1||_1+||x_2||_2)\\ \Rightarrow ||A(x_1,x_2)||_Y &\le M||(x_1,x_2)|| \qquad \forall (x_1,x_2)\in X_1\times X_2\end{aligned}$$

  $\Rightarrow A$ liên tục và $||A|| \le M$.

- Tiếp theo ta chứng minh $||A|| \ge M$. Ta có :

$$||A_1(x_1)||_Y = ||A(x_1,\theta)||_Y \le ||A||.||(x_1,\theta)||$$
$$\text{hay } ||A_1(x_1)||_Y \le ||A||.||x_1|| \qquad \forall x_1\in X_1$$

  Do đó $||A_1|| \le ||A||$. Tương tự, $||A_2|| \le ||A||$. Vậy $M \le ||A||$ (đpcm)

Bài 3

Gọi l_1 là tập hợp các dãy số thực $x=\{\lambda_k\}$ sao cho : $||x|| = \sum\limits_{k=1}^{\infty}|\lambda_k| < \infty$

Trong l_1 ta xét các phép toán thông thường về cộng hai dãy và nhân dãy với số thực và chuẩn nêu trên.

1. Giả sử $\{\alpha_k\}$ là dãy số thực bị chặn. Chứng minh rằng :

$$f : x=\{\lambda_k\}\in l_1 \longmapsto f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\lambda_k \qquad (*)$$

   là một phiếm hàm tuyến tính liên tục và $||f|| = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}^*}|\alpha_k|$

2. Giả sử $f : l_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ là một phiếm hàm tuyến tính liên tục. Chứng minh rằng tồn tại dãy số thực bị chặn $\{\alpha_k\}$ sao cho $(*)$ đúng với mọi $x\in l_1$.

Giải :

1. - Trước hết ta kiểm tra $f(x)$ xác định hay chứng minh chuỗi trong $(*)$ là hội tụ. Thật vậy, đặt $M=\sup\limits_k|\alpha_k|$ ta có :

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k\lambda_k| \le M\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k| < \infty, \qquad \forall x=\{\lambda_k\}\in l_1 \qquad (**)$$

   - Với $x=\{\lambda_k\}, y=\{\gamma_k\}$ trong l_1 và $a,b\in\mathbb{R}$ ta có :

$$\begin{aligned}ax+by &= \{a\lambda_k+b\gamma_k\}\\ \Rightarrow f(ax+by) &= \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k(a\lambda_k+b\gamma_k)\\ &= a\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\lambda_k + b\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\gamma_k\\ &= af(x)+bf(y).\end{aligned}$$

   Vậy f tuyến tính.

- Từ (∗∗) ta suy ra $|f(x)| \le M||x|| \qquad \forall x \in l_1$
  Do đó f liên tục và $||f|| \le M$
  Để chứng minh $||f|| \ge M$ ta xét các dãy $e_n = \{\delta_{kn}\}_k$ với $\delta_{kn} = 0$ nếu $k \ne n, \delta_{nn} = 1$
  Ta có
  $$||e_n|| = 1, \qquad f(e_n) = \alpha_n, \qquad ||f(e_n)|| \le ||f||.||e_n||$$
  nên $||f|| \ge |\alpha_n| \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*$. Suy ra $\quad ||f|| \ge M = \sup_n |\alpha_n|$.
  Vậy $||f|| = M$

2. Với e_n được định nghĩa ở trên ta đặt $\alpha_n = f(e_n)$. Ta có
$$|\alpha_n| \le ||f||.||e_n|| = ||f|| \qquad \forall n = 1, 2, \ldots$$
nên $\{\alpha_k\}_k$ là dãy bị chặn. Ta sẽ chứng minh với α_k định nghĩa như trên thì (∗) đúng.
Cố định $x = \{\lambda_k\} \in l_1$ ta đặt $x_n = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n, \quad n \in \mathbb{N}^*$ Ta dễ dàng thấy $\lim x_n = x$ trong l_1 (xem một bài tập ở §1), do đó theo tính liên tục và tuyến tính của f ta có :
$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n\to\infty} f(x_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(e_k) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \alpha_k \end{aligned}$$
Từ đây ta có (∗)

Bài 4
Gọi X là không gian định chuẩn các hàm thực $x = x(t)$ liên tục trên $[0, \infty)$ với chuẩn
$$||x|| = \sup_{t\in[0,\infty)} e^{at}|x(t)| < \infty \qquad (a > 0 \text{ cho trước})$$
Chứng minh phiếm hàm f sau là tuyến tính liên tục trên X và tính chuẩn của nó :
$$f(x) = \int_0^{+\infty} tx(t)dt \qquad x \in X.$$

Giải

Trước tiên ta cũng kiểm tra $f(x)$ xác định. Với $x \in X$ ta có
$$|tx(t)| = e^{at}.|x(t)|.te^{-at} \le ||x||.te^{-at} \qquad \forall t \in [0, \infty) \quad (1)$$
Hàm te^{-at} khả tích trên $[0, \infty)$ (dễ tính $\int_0^{+\infty} te^{-at}dt = \dfrac{1}{a^2}$) nên hàm $tx(t)$ cũng khả tích trên $[0, \infty)$.

Dễ dàng kiểm tra được f là tuyến tính. Từ bất đẳng thức $(*)$ ta có :

$$|f(x)| \leq \int\limits_0^{+\infty} te^{-at}dt.||x||$$
$$= \frac{1}{a^2}||x|| \qquad \forall x \in X \qquad (2).$$

Do đó f liên tục và $||f|| \leq \dfrac{1}{a^2}$

Ta sẽ chứng minh $||f|| = \dfrac{1}{a^2}$. Trong (1), (2) ta thấy dấu " = " đạt được khi $x = e^{-at}$. Đặt $x_o = e^{-at}$, ta có :

$$x_o \in X, \quad ||x_o|| = 1, \quad f(x_o) = \frac{1}{a^2}$$

Mặt khác $\quad |f(x_o)| \leq ||f||.||x_o||$. Do đó ta suy ra $||f|| \geq \dfrac{1}{a^2}$. Vậy $||f|| = \dfrac{1}{a^2}$

Bài 5

Trên $C[-1,1]$ với chuẩn hội tụ đều ta xét phiếm hàm :

$$f(x) = \int\limits_0^1 x(t)dt - \int\limits_{-1}^0 x(t)dt \qquad x \in C[-1,1]$$

Chứng minh f tuyến tính liên tục và tính $||f||$.

Giải :

Dễ dàng kiểm tra f là tuyến tính và

$$|f(x)| \leq \int\limits_0^1 |x(t)|dt + \int\limits_{-1}^0 |x(t)|dt \leq 2||x|| \qquad \forall x \in C[-1,1]$$

Do vậy f liên tục và $||f|| \leq 2$. Ta sẽ chứng minh $||f|| = 2$.

Ta thấy trong bất đẳng thức trên dấu " = " đạt được khi $x_o(t) = 1$ trên $(0,1]$, $x_o(t) = -1$ trên $[-1,0]$, nhưng hàm x_o này không thuộc $C[-1,1]$. Ta xét dãy hàm $\{x_n\}$ như sau :

$$x_n(t) = \begin{cases} -1, & \text{nếu } t \in [-1, -\frac{1}{n}] \\ nt, & \text{nếu } t \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \\ 1, & \text{nếu } t \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases} \qquad (n \geq 2)$$

(nếu vẽ đồ thị của hàm x_n và hàm x_o ta sẽ thấy ý nghĩa của việc chọn x_n). Ta có :

$$x_n \in C[-1,1], \qquad ||x_n|| = 1, \qquad f(x_n) = 2 - \frac{1}{n}.$$

Mà ta cũng có $\quad |f(x_n)| \leq ||f||.||x_n||.$

Do đó ta được $\quad ||f|| \geq 2 - \dfrac{1}{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Cho $n \to \infty$ ta được $||f|| \geq 2$. Vậy $||f|| = 2$

Bài 6

Cho các không gian định chuẩn $(X, ||.||_X), (Y_1, ||.||_1), (Y_2, ||.||_2)$ và các ánh xạ tuyến tính liên tục $A_k : X \longrightarrow Y_k, \qquad k = 1, 2.$

Ta xét ánh xạ

$$\begin{aligned} A: \qquad & X \longrightarrow Y_1 \times Y_2 \\ & A(x) = (A_1(x), A_2(x)), \qquad x \in X. \end{aligned}$$

Chứng minh A tuyến tính, liên tục và :

1. $\max(||A_1||, ||A_2||) \leq ||A|| \leq ||A_1|| + ||A_2||$
   nếu trong $Y_1 \times Y_2$ ta xét chuẩn :
   $$||(y_1, y_2)|| = ||y_1||_1 + ||y_2||_2, \qquad (y_1, y_2) \in Y_1 \times Y_2.$$
2. $||A|| = \max(||A_1||, ||A_2||)$ nếu trong $Y_1 \times Y_2$ ta xét chuẩn :
   $$||(y_1, y_2)|| = \max(||y_1||_1, ||y_2||_2)$$

Hướng dẫn

1. Ta có :
   $$||A(x)|| = ||A_1(x)||_1 + ||A_2(x)||_2$$
   $$\Rightarrow \begin{cases} ||A(x)|| & \leq (||A_1|| + ||A_2||)||x|| \\ ||A_k(x)|| & \leq ||A(x)|| \leq ||A||.||x|| \end{cases}$$
   $$\Rightarrow \begin{cases} ||A|| & \leq ||A_1|| + ||A_2|| \\ ||A_k|| & \leq ||A|| \end{cases}$$
2. $||A(x)|| = \max(||A_1(x)||, ||A_2(x)||)$, sử dụng các đánh giá tương tự.

Bài 7

Trên $C[-1, 1]$ ta xét chuẩn hội tụ đều và xét phiếm hàm :

$$f(x) = \int_{-1}^{1} x(t)dt - x(0), \qquad x \in C[-1, 1].$$

Tính $||f||$.

Hướng dẫn

$$|f(x)| \leq \int_{-1}^{1} |x(t|dt + |x(0)| \leq 3||x||, \qquad \forall x \in C[-1, 1].$$

Do đó $||f|| \leq 3$. Để chứng minh $||f|| \geq 3$ ta chú ý rằng trong bất đẳng thức trên, dấu " = " đạt được tại hàm $x_o(t) = 1$ nếu $t \neq 0$, $x_o(0) = -1$, nhưng $x_o \notin C[-1, 1]$.