GIẢI TÍCH (CƠ SỞ)

Chuyên ngành: **Giải Tích**, **PPDH Toán**

Phần 2. **Không gian định chuẩn**
Ánh xạ tuyến tính liên tục

§3. **Không gian Hilbert**

(Phiên bản đã chỉnh sửa)

PGS TS Nguyễn Bích Huy

Ngày 1 tháng 3 năm 2006

I. Phần lý thuyết

1 Tích vô hướng, không gian Hilbert

1.1 Định nghĩa

Định nghĩa 1 *1. Cho không gian vectơ X trên trường số K($K = \mathbb{R}$ hoặc $K = \mathbb{C}$).Một ánh xạ từ $X \times X$ vào $K, (x, y) \to \langle x, y\rangle$ được gọi là một* tích vô hướng trên X *nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau:*

(a) $\langle x, x\rangle \geq 0 \qquad \forall x \in X$
$\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

(b) $\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle} \quad (\langle y, x\rangle = \langle x, y\rangle$ *nếu* $K = \mathbb{R}), \quad \forall x, y \in X$

(c) $\langle x + x', y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x', y\rangle \qquad \forall x, x', y \in X$

(d) $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle \qquad \forall x, y \in X, \forall \lambda \in K$

Từ các tính chất i) - iv) ta cũng có:
$\langle x, y+y'\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, y'\rangle, \qquad \langle x, \lambda y\rangle = \overline{\lambda}\langle x, y\rangle$

2. *Nếu* $\langle .,. \rangle$ *là một tích vô hướng trên* X *thì ánh xạ* $x \to \sqrt{\langle x, x\rangle}$ *là một chuẩn trên* X*, gọi là* chuẩn sinh bởi tích vô hướng.

3. *Nếu* $\langle .,. \rangle$ *là tích vô hướng trên* X *thì cặp*$(X, \langle .,. \rangle)$ *gọi là một* không gian tiền Hilbert *(hay không gian Unita, không gian với tích vô hướng). Sự hội tụ, khái niệm tập mở,...,trong* $(X, \langle .,. \rangle)$ *luôn được gắn với chuẩn sinh bởi* $\langle .,. \rangle$*. Nếu không gian định chuẩn tương ứng đầy đủ thì ta nói* $(X, \langle .,. \rangle)$ *là không gian Hilbert.*

1.2 Các tính chất

1. Bất đẳng thức Cauchy - Schwartz: $|\langle x, y\rangle| \le \|x\|.\|y\|$
2. $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ (đẳng thức bình hành).
3. Nếu $\lim x_n = a, \lim y_n = b$ thì $\lim\langle x_n, y_n\rangle = \langle a, b\rangle$

Ví dụ 1 *1. Trong* $C[a,b]$ *các hàm thực liên tục trên* $[a,b]$ *thì ánh xạ*

$$(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle = \int_a^b x(t)y(t)dt$$

là một tích vô hướng. Không gian $(C[a,b], \langle .,. \rangle)$ *không là không gian Hilbert.(xây dựng ví dụ tương tự ở phần không gian metric)*

2. Trong l_2*, với* $x = \{\lambda_k\}, y = \{\alpha_k\}$*, ta định nghĩa*

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \alpha_k$$

thì $\langle .,. \rangle$ *là tích vô hướng,* $(l_2, \langle .,. \rangle)$ *là không gian Hilbert.*

2 Sự trực giao

2.1 Định nghĩa

Định nghĩa 2 *Cho không gian với tích vô hướng* $(X, \langle .,. \rangle)$ *và* $x, y \in X, \phi \neq M \subset X$.

1. *Ta nói x trực giao với y (viết* $x \perp y$*) nếu* $\langle x, y \rangle$
2. *Nếu* $x \perp y \quad \forall y \in M$ *thì ta viết* $x \perp M$*. Ta ký hiệu*

$$M^{\perp} = \{x \in X : x \perp M\}$$

.

2.2 Các tính chất

1. Nếu $x \perp M$ thì $x \perp \langle M \rangle (\langle M \rangle$ chỉ không gian con sinh bởi M)
2. Nếu $x \perp y_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ và $\lim y_n = y$ thì $x \perp y$. Suy ra nếu $x \perp M$ thì cũng có $x \perp \overline{M}$.
3. $M^{\perp}$ là một không gian con đóng.
4. Nếu $x_1, \ldots, x_n$ đôi nột trực giao thì

$$\|x_1 + \ldots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \ldots + \|x_n\|^2 (\text{đẳng thức Pythagore})$$

Định lý 1 (về phân tích trực giao) *Nếu M là một không gian con đóng của không gian Hilbert* $(X, \langle .,. \rangle)$ *thì mỗi* $x \in X$ *có duy nhất phân tích ở dạng*

$$x = y + z, \qquad y \in M, z \in M^{\perp} \tag{1}$$

Phần tử y trong (1) gọi là hình chiếu trực giao của x lên M và có tính chất

$$\|x - y\| = \inf_{y' \in M} \|x - y'\|.$$

3 Hệ trực chuẩn. Chuỗi Fourier

3.1 Định nghĩa

Cho không gian Hilbert $(X, \langle ., . \rangle)$

1. Hệ $\{e_1, e_2, \ldots\} \subset X$ gọi là một hệ trực chuẩn nếu

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{nếu } i \neq j \\ 1 & \text{nếu } i = j \end{cases}$$

   Như vậy, $\{e_n\}$ là hệ trực chuẩn nếu $\|e_n\| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ và $e_i \perp e_j (i \neq j)$.

2. Hệ trực chuẩn $\{e_n\}$ gọi là đầy đủ, nếu nó có tính chất sau:

$$(x \perp e_n \quad \forall n = 1, 2, \ldots) \Rightarrow x = \theta.$$

3. Nếu $\{e_n\}$ là hệ trực chuẩn thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \cdot e_n$ gọi là chuỗi Fourier của phần tử x theo hệ chuẩn $\{e_n\}$.

Định lý 2 *Cho $\{e_n\}$ là hệ trực chuẩn trong không gian Hilbert $(X, \langle ., . \rangle)$ và $\{\lambda_n\}$ là một dãy số. Ta xét chuỗi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n \tag{2}$$

Ta có:

1. *Chuỗi (2) hội tụ khi và chỉ khi $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 < \infty$.*

2. *Giả sử chuỗi (2) hội tụ và có tổng x thì*

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2, \qquad \langle x, e_n \rangle = \lambda_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Định lý 3 *Chuỗi Fourier của mọi phần tử $x \in X$ theo hệ trực chuẩn $\{e_n\}$ là hội tụ và ta có*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leq \|x^2\| \qquad \textit{(bất dẳng thức Bessel).}$$

Ý nghĩa của hệ trực chuẩn đầy đủ được làm rõ trong định lý sau.

Định lý 4 *Cho $\{e_n\}$ là hệ trực chuẩn. Các mệnh đề sau là tương đương:*

1. *Hệ $\{e_n\}$ đầy đủ*

2. $$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n, \qquad \forall x \in X.$$

3. $$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 \qquad \forall x \in X \qquad \textit{(đẳng thức Parseval)}$$

II. Phần Bài tập

Bài tập 1 *Trong không gian l_1 các dãy số thực $x = \{\lambda_k\}, \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| < \infty$ ta định nghĩa*

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \cdot \alpha_k, \qquad x = \{\lambda_k\} \in l_1, y = \{\alpha_k\} \in l_1$$

1. *Chứng minh $\langle ., .\rangle$ là một tích vô hướng trên l_1.*

2. *$(l_1, \langle ., .\rangle)$ không là không gian Hilbert.*

Giải

1. Trước tiên ta cần kiểm tra $\langle x, y\rangle$ xác định $\forall x, y \in l_1$. Thật vậy, vì $\lim \alpha_k = 0$ nên $\{\alpha_k\}$ bị chặn: $\exists M \in \mathbb{R}, |\alpha_k| \leq M \forall k \in \mathbb{N}^*$.
   Do đó
$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k \alpha_k| \leq M \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| < \infty$$
   và chuỗi định nghĩa $\langle x, y\rangle$ hội tụ.
   Các điều kiện của tích vô hướng dễ dàng kiểm tra.

2. Chuẩn sinh bởi $\langle ., .\rangle$ sẽ là $\|x\| = (\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2)^{\frac{1}{2}}, x = \{\lambda_k\}$.
   Xét dãy $\{x_n\} \subset l_1$ với $x_n = \{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, 0, \ldots\}$.

   - Ta có $\{x_n\}$ là dãy Cauchy vì với $n > m$:
$$\begin{aligned} x_n - x_m &= \{0, \ldots, 0, \frac{1}{m+1}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, 0, \ldots\} \\ \Rightarrow \|x_n - x_m\| &= (\sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k^2})^{\frac{1}{2}} \longrightarrow 0 \qquad (\text{khi } n, m \to \infty) \end{aligned}$$
   - Ta chứng minh $\{x_n\}$ không hội tụ.
     Giả sử trái lại tồn tại $a = \{\alpha_k\} \in l_1$ sao cho $\lim \|x_n - a\| = 0$.
     Cố định $k \in \mathbb{N}^*$, khi $n \geq k$, ta có
$$|\frac{1}{k} - \alpha_k| \leq \|x_n - a\|$$
     Từ đây ta có $\alpha_k = \frac{1}{k} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$, vô lý vì dãy $\{\frac{1}{k}\}_k \notin l_1$.
     Vậy l_1 với tích vô hướng trên không là không gian Hilbert.

Bài tập 2 *Cho không gian Hilbert X và X_0 là không gian con đóng của X, $A : X_0 \to Y$ là ánh xạ tuyến tính liên tục(Y là một không gian định chuẩn). Chứng minh tồn tại ánh xạ tuyến tính liên tục $B : X \to Y$ sao cho $B(x) = A(x) \quad \forall x \in X_0, \|B\| = \|A\|$*

Giải

- Ta định nghĩa ánh xạ A như sau. Theo định lý về phân tích trực giao, mỗi $x \in X$ có duy nhất phân tích

$$x = y + z, \quad y \in X_0, z \in X_0^{\perp} \tag{3}$$

  và ta đặt $B(x) := A(y)$.
  Vì phân tích dạng (3) của $x \in X_0$ là $x = x + \theta$ nên ta có ngay $B(x) = A(x) \quad \forall x \in X_0$

- Ta kiểm tra B là tuyến tính: với $x, x' \in X, \alpha, \alpha' \in K$ ta viết phân tích (3) và

$$x' = y' + z', \quad y' \in X_0, z' \in X_0^{\perp}$$

  Khi đó:

$$\begin{aligned}
\alpha x + \alpha' x' &= \underbrace{(\alpha y + \alpha' y')}_{\in X_0} + \underbrace{(\alpha z + \alpha' z')}_{\in X_0^{\perp}} \\
\Rightarrow B(\alpha x + \alpha' x') &= A(\alpha y + \alpha' y') \\
&= \alpha A(y) + \alpha' A(y') \\
&= \alpha B(x) + \alpha' B(x').
\end{aligned}$$

- Tiếp theo ta chứng minh B liên tục và $\|B\| = \|A\|$.
  Từ (3) và định lý Pythagore ta có $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$, do đó:

$$\begin{aligned}
\|B(x)\| &= \|A(y)\| \leq \|A\| \cdot \|y\| \qquad \text{(Do } A \text{ liên tục)} \\
\Rightarrow \|B(x)\| &\leq \|A\| \cdot \|x\|, \quad \forall x \in X
\end{aligned}$$

  Vậy B liên tục và $\|B\| \leq \|A\|$. Mặt khác ta có:
  $\|B\| = \sup_{x \in X, \|x\|=1} \|B(x)\| \geq \sup_{x \in X_0, \|x\|=1} \|B(x)\|$
  $= \sup_{x \in X_0, \|x\|=1} \|A(x)\| = \|A\|$
  Vậy $\|B\| = \|A\|$.

Bài tập 3 *Cho hệ trực chuẩn* $\{e_n\}$ *trong không gian Hilbert* X*. Xét dãy ánh xạ*

$$\begin{aligned} P_n : & X \longrightarrow X \\ & P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k, \qquad x \in X, n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

1. *Chứng minh* $P_n(x)$ *là hình chiếu trực giao của* x *lên* $X_n := \langle e_1, \ldots, e_n \rangle$.
2. *Giả sử hệ* $\{e_n\}$ *đầy đủ. Chứng minh* $\lim_{n\to\infty} ||P_n(x) - I(x)|| = 0 \quad \forall x \in X$ *nhưng* $||P_n - I|| \nrightarrow 0$*(*$I : X \to X$ *là ánh xạ đồng nhất)*

Giải

1. Ta có: $x = P_n(x) + (x - P_n(x)), \quad P_n(x) \in X_n$.
   Do đó chỉ còn phải chứng minh $x - P_n(x) \in X_n^{\perp}$ hay $x - P_n(x) \perp X_n$. Vì X_n sinh bởi $\{e_1, \ldots, e_n\}$ nên chỉ cần chứng minh $x - P_n(x) \perp e_i \quad \forall i = 1, \ldots, n$.Thật vậy:

$$\langle x - P_n(x), e_i \rangle = \langle x, e_i \rangle - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle \langle e_k, e_i \rangle = \langle x, e_i \rangle - \langle x, e_i \rangle = 0$$

2. $-$ Do đẳng thức Parseval, ta có $\forall x \in X$:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle \cdot e_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle \cdot e_k = \lim_{n\to\infty} P_n(x)$$

   $-$ Đặt

$$Q_n(x) = I(x) - P_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle \cdot e_k, x \in X, n = 1, 2 \ldots$$

Ta có $Q_n(x)$ tuyến tính và

$$||Q_n(x)||^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |\langle x, e_k\rangle|^2 \leq ||x||^2 \quad \text{(bđt Bessel)}$$

$$\Rightarrow Q_n \text{ liên tục}, ||Q_n|| \leq 1$$

Mặt khác, $Q_n(e_{n+1}) = e_{n+1}$ và $||Q_n|| \geq \frac{||Q_n(e_{n+1}||}{||e_{n+1}||} = 1$ nên ta có $||Q_n|| = 1$ hay $||I - P_n|| = 1$

Bài tập 4 *Cho $\{e_n\}$ là hệ trực chuẩn trong không gian Hilbert X và $\{\lambda_n\}$ là dãy số.*

1. *Giả sử $\{\lambda_n\}$ là dãy bị chặn. Chứng minh rằng*

$$A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n\rangle \cdot e_n \quad x \in X \tag{4}$$

   là ánh xạ tuyến tính liên tục từ X vào X và $||A|| = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} |\lambda_n|$

2. *Giả sử chuỗi trong (4) hội tụ $\forall x \in X$. Chứng minh $\{\lambda_n\}$ là dãy bị chặn.*

Giải

1. Đặt $M = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} |\lambda_n|$
   Đầu tiên ta kiểm tra A xác định hay chứng minh chuỗi trong (4) hội tụ. Ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n \langle x, e_n\rangle|^2 \leq M^2 \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leq M^2 \cdot ||x||^2 \tag{5}$$

   nên theo định lý 2, chuỗi trong (4) hội tụ.
   Dễ kiểm tra A là ánh xạ tuyến tính. Từ định lý 2 và (5) ta có

$$||A(x)||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda\langle x, e_n\rangle|^2 \leq M^2 \cdot ||x||^2 \quad \forall x \in X$$

$$\Rightarrow A \text{ liên tục}, \quad ||A|| \leq M$$

Mặc khác ta có:

$$A(e_k) = \lambda_k e_k \quad \text{và } ||A(e_k)|| \leq ||A|| \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

nên $||A|| \geq |\lambda_k| \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$. Do đó $||A|| \geq M$. Vậy $||A|| = M$ đpcm.

2. Từ giả thiết và định lý 2, ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 \cdot |\langle x, e_n\rangle|^2 < \infty \qquad \forall x \in X. \tag{6}$$

Nếu $\{\lambda_n\}$ không bị chặn thì ta tìm được dãy con $\{\lambda_{n_k}\}_k$ sao cho $|\lambda_{n_k}| > k (k \in \mathbb{N}^*)$. Ta có

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_{n_k}|^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \Rightarrow \exists a := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{n_k}} e_{n_k} \qquad \text{(theo định lý 2)}$$

Ta có

$$\langle a, e_n\rangle = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_{n_k}} & \text{nếu } n = n_k \\ 0 & \text{nếu } n \notin \{n_1, n_2, \ldots\} \end{cases}$$

do đó:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 \cdot |\langle a, e_n\rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_{n_k}|^2 \cdot \frac{1}{|\lambda_{n_k}|^2} = \infty$$

Ta gặp mâu thuẩn với (6).