# ĐẠI SỐ CƠ BẢN
# (ÔN THI THẠC SĨ TOÁN HỌC)
# Bài 11. Cơ Sở, Số Chiều Của Không Gian Vectơ

PGS TS Mỵ Vinh Quang

Ngày 27 tháng 3 năm 2005

## 1. Cơ sở

Cho $V$ là không gian vectơ, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ là một hệ vectơ của $V$.

- ⋆ Hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ gọi là hệ sinh của $V$ nếu mọi vectơ $\beta \in V$ đều biểu thị tuyến tính được qua hệ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.
- ⋆ Hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ gọi là một cơ sở của không gian vectơ $V$ nếu nó là hệ sinh của $V$ và là hệ độc lập tuyến tính.
- ⋆ Từ định nghĩa, hai cơ sở bất kỳ của $V$ đều tương đương và độc lập tuyến tính. Do đó, theo định lý cơ bản chúng có số vectơ bằng nhau. Số đó gọi là số chiều $V$, ký hiệu là $dimV$. Vậy theo định nghĩa:

$$dimV = \text{ số vectơ của một cơ sở bất kỳ của V}$$

- ⋆ Không gian vectơ có cơ sở gồm hữu hạn vectơ gọi là không gian vectơ hữu hạn chiều. Không gian vectơ khác không, không có cơ sở gồm hữu hạn vvectơ gọi là không gian vectơ vô hạn chiều. Đại số tuyến tính chủ yếu xét các không gian vectơ hữu hạn chiều.

## 2. Các ví dụ

**Ví dụ 1**. Không gian $\mathbb{R}^n$, xét các vectơ:

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, ..., 0) \\ e_2 &= (0, 1, ..., 0) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_3 &= (0, 0, ..., 1) \end{aligned}$$

Dễ dàng kiểm tra $e_1, e_2, \ldots, e_n$ là cơ sở của $\mathbb{R}^n$, gọi là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n$ và ta có $dim\mathbb{R}^n = n$
**Ví dụ 2.** Trong không gian vectơ các ma trận cấp $m \times n$ hệ số thực $M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Ta xét hệ vectơ $\{E_{ij}\}$, trong đó:

$$E_{ij} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & \vdots & & 0 \\ \dots & 1 & \dots & \dots \\ 0 & \vdots & & 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{ hàng } i, \\ \quad\ \uparrow \\ \quad\ \text{cột } j \end{array} \qquad \begin{matrix} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{matrix}$$

là cơ sở của $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ và do đó ta có $dimM_{m\times n}(\mathbb{R}) = mn$
**Ví dụ 3.** $\mathbb{R}_n[x]$ là tập các đa thức với hệ số thực có bậc $\leq n$ với các phép toán thông thường là một không gian vectơ. Hệ vectơ $1, x, x^2, \dots, x^n$ là một cơ sở của $\mathbb{R}_n[x]$ và ta có $dim\mathbb{R}_n[x] = n + 1$

## 3. Tính chất cơ bản của không gian vectơ hữu hạn chiều

Cho $V$ là không gian vectơ hữu hạn chiều, $dimV = n$. Khi đó:

(a) Mọi hệ vectơ có nhiều hơn $n$ vectơ đều phụ thuộc tuyến tính

(b) Mọi hệ có $n$ vectơ độc lập tuyến tính đều là cơ sở của $V$

(c) Mọi hệ có $n$ vectơ là hệ sinh của $V$ đều là cơ sở của $V$

(d) Mọi hệ độc lập tuyến tính, có $k$ vectơ đều có thể bổ sung têm $n - k$ vectơ để được cơ sở của $V$

Chú ý rằng từ tính chất $(b), (c)$ nếu biết $dimV = n$ thì để chứng minh một hệ $n$ vectơ là cơ sở của $V$ ta chỉ cần chứng minh hệ đó là hệ độc lập tuyến tính hoặc hệ đó là hệ sinh.

## 4. Tọa độ của vectơ trong cơ sở.

(a) **Định nghĩa**
Cho $V$ là không gian vectơ $n$ chiều ($dimV = n$) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ là cơ sở của $V$.
Với $x \in V$, khi đó $x$ viết được duy nhất dưới dạng:

$$x = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n, \quad a_i \in \mathbb{R}$$

Bộ số $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ gọi là tọa độ của $x$ trong cơ sở $(\alpha)$, ký hiệu:

$$x/_{(\alpha)} = (a_1, a_2, ..., a_n)$$

Hoặc:

$$[x]/_{(\alpha)} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

(b) **Ma trận đổi cơ sở, công thức đổi tọa độ**
Trong không gian vectơ $V$ cho 2 cơ sở:

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \ (\alpha)$$

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \ (\beta)$$

Khi đó, các vectơ $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ viết được duy nhất dưới dạng:

$$\begin{cases} \beta_1 & = & a_{11}\alpha_1 & + & a_{12}\alpha_2 & + & \ldots & + & a_{n1}\alpha_n \\ \beta_2 & = & a_{21}\alpha_1 & + & a_{22}\alpha_2 & + & \ldots & + & a_{n2}\alpha_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_n & = & a_{n1}\alpha_1 & + & a_{2n}\alpha_2 & + & \ldots & + & a_{nn}\alpha_n \end{cases}$$

Ma trận các hệ số chuyển vị:

$$T_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

gọi là ma trận đổi cơ sở từ $(\alpha)$ sang $(\beta)$
Từ định nghĩa, ta có ngay $T_{\alpha\beta}$ là ma trận khả nghịch và $T_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}^{-1}$

(c) **Công thức đổi tọa độ**
Cho $V$ là không gian vectơ, $x \in V$, và các cơ sở của $V$ là:

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \ (\alpha)$$

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \ (\beta)$$

Giả sử:

$$x/_{(\alpha)} = (x_1, x_2, ..., x_n) \ , \quad x/_{(\beta)} = (y_1, y_2, ..., y_n)$$

Khi đó ta có:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = T_{\alpha\beta} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

hay viết một cách ngắn gọn: $[x]/_{(\alpha)} = T_{\alpha\beta}[x]/_{(\beta)}$
Công thức trên cho phép tính tọa độ của vectơ $x$ trong cơ sở $(\alpha)$ theo tọa độ của vectơ $x$ trong cơ sở $(\beta)$.

## 5. Một số ví dụ

**Ví dụ 1.** Trong $\mathbb{R}^3$ cho 2 cơ sở:

$$\alpha_1 = (1,1,1), \quad \alpha_2 = (-1,2,1), \quad \alpha_3 = (1,3,2) \ (\alpha)$$

$$\beta_1 = (1,0,1), \quad \beta_2 = (1,1,0), \quad \beta_3 = (0,1,1) \ (\beta)$$

(a) Tìm ma trận đổi cơ sở từ $(\alpha)$ sang $(\beta)$.

(b) Viết công thức tính tọa độ của vectơ $x$ trong cơ sở $(\alpha)$ theo tọa độ của $x$ trong cơ sở $(\beta)$.

**Giải:**

(a) Giả sử:

$$\begin{array}{rcrcrcrl} \beta_1 & = & a_1\alpha_1 & + & a_2\alpha_2 & + & a_3\alpha_3 & (1) \\ \beta_2 & = & b_1\alpha_1 & + & b_2\alpha_2 & + & b_3\alpha_3 & (2) \\ \beta_3 & = & c_1\alpha_1 & + & c_2\alpha_2 & + & c_3\alpha_3 & (3) \end{array}$$

Khi đó theo định nghĩa

$$T_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

Để tìm $a_i, b_i, c_i$ ta phải giải các phương trình vectơ (1), (2), (3).

Phương trình (1) tương đương với hệ: $\begin{cases} a_1 - a_2 + a_3 = 1 \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0 \\ a_1 + a_2 + 2a_3 = 1 \end{cases}$

Phương trình (2) tương đương với hệ: $\begin{cases} b_1 - b_2 + b_3 = 1 \\ b_1 + 2b_2 + 3b_3 = 1 \\ b_1 + b_2 + 2b_3 = 0 \end{cases}$

Phương trình (3) tương đương với hệ: $\begin{cases} c_1 - c_2 + c_3 = 0 \\ c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 1 \\ c_1 + c_2 + 2c_3 = 1 \end{cases}$

Để giải 3 hệ trên, ta dùng phương pháp Gauss. Ma trận các hệ số mở rộng:

$$\left[\begin{array}{rrr|r|r|r} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|r|r|r} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{rrr|r|r|r} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

Hệ 1) $a_3 = -2,\ a_2 = -1 - a_3 = 1,\ a_1 = a_2 - a_3 + 1 = 4$

Hệ 2) $b_3 = 3,\ b_2 = 1 - b_3 = -2,\ b_1 = b_2 - b_3 + 1 = -4$

Hệ 3) $c_3 = -1,\ c_2 = -c_3 = 1,\ c_1 = c_2 - c_3 = 2$

Vậy ma trận đổi cơ sở từ $(\alpha)$ sang $(\beta)$ là:

$$T_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

(b) Giả sử

$$x/_{(\alpha)} = (x_1, x_2, x_3)\ , \quad x/_{(\beta)} = (y_1, y_2, y_3)$$

Công thức tính tọa độ của vectơ $x$ trong cơ sở $(\alpha)$ theo tọa độ của $x$ trong cơ sở $(\beta)$ là:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

hay

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & = & 4y_1 & - & 4y_2 & + & 2y_3 \\ x_2 & = & y_1 & - & 2y_2 & + & y_3 \\ x_3 & = & -2y_1 & + & 3y_2 & - & y_3 \end{array}$$

**Ví dụ 2.**
Trong $\mathbb{R}_n[x]$ cho 2 cơ sở:

$$\begin{array}{llllll} u_1 = 1, & u_2 = x, & u_3 = x^2 & ,\dots, & u_{n+1} = x^n & (U) \\ v_1 = 1, & v_2 = x-a, & v_3 = (x-a)^2 & ,\dots, & v_{n+1} = (x-a)^n & (V) \end{array}$$

trong đó $a$ là hằng số.

(a) Tìm ma trận đổi cơ sở từ $(U)$ sang $(V)$

(b) Tìm ma trận đổi cơ sở từ $(V)$ sang $(U)$

**Giải**

(a) Ta có:

$$\begin{aligned} v_{k+1} &= (x-a)^k = C_k^0(-a)^k + C_k^1(-a)^{k-1}x + \dots + C_k^k x^k \\ &= C_k^0(-a)^k u_1 + C_k^1(-a)^{k-1}u_2 + \dots + C_k^k u_{k+1} + 0u_{k+2} + \dots + 0u_{n+1} \end{aligned}$$

lần lượt cho $k = 0, 1, \dots, n$ ta có:

$$T_{UV} = \begin{bmatrix} C_0^0 & C_1^0(-a) & \dots & C_k^0(-a)^k & \dots & C_n^0(-a)^n \\ 0 & C_1^1 & \dots & C_k^1(-a)^{k-1} & \dots & C_n^1(-a)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \iddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & C_k^k & \iddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \iddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & C_n^n \end{bmatrix}$$

(b) Ta có

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= x^k = [(x-a)+a]^k = C_k^0 a^k + C_k^1 a^{k-1}x + \dots + C_k^k x^k \\ &= C_k^0 a^k v_1 + C_k^1 a^{k-1} v_2 + \dots + C_k^k v_{k+1} + 0v_{k+2} + \dots + 0v_{n+1} \end{aligned}$$

lần lượt cho $k = 0, 1, \dots, n$ ta có:

$$T_{UV} = \begin{bmatrix} C_0^0 & C_1^0 a & \dots & C_k^0 a^k & \dots & C_n^0 a^n \\ 0 & C_1^1 & \dots & C_k^1 a^{k-1} & \dots & C_n^1 a^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \iddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & C_k^k & \iddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \iddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & C_n^n \end{bmatrix}$$

# BÀI TẬP

1. Trong $\mathbb{R}_3[x]$ cho các vectơ:
   $$u_1 = x^3 + 2x^2 + x + 1$$
   $$u_2 = 2x^3 + x^2 - x + 1$$
   $$u_3 = 3x^3 + 3x^2 - x + 2$$
   Tìm điều kiện để vectơ $u = ax^3 + bx^2 + cx + d$ biểu thị tuyến tính được qua hệ $u_1, u_2, u_3$.

2. Trong $\mathbb{R}^3$ cho các hệ vectơ:
   $u_1 = (1, 2, 1),\ u_2 = (2, -2, 1),\ u_3 = (3, 2, 2)\ (U)$
   $v_1 = (1, 1, 1),\ v_2 = (1, 1, 0),\ v_3 = (1, 0, 0)\ (V)$

   (a) Chứng minh rằng $(U), (V)$ là các cơ sở của $\mathbb{R}$

   (b) Tìm các ma trận đổi cơ sở từ $(U)$ sang $(V)$ và từ $(V)$ sang $(U)$

3. Trong $\mathbb{R}^2$ cho các cơ sở $(\alpha), (\beta), (\gamma)$
   Biết:
   $$T_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad T_{\gamma\beta} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$
   và cơ sở $(\gamma)$: $\gamma_1 = (1, 1), \quad \gamma_2 = (1, 0)$
   Tìm cơ sở $(\alpha)$

4. Cho $\mathbb{R}^+$ là tập các số thực dương. Trong $\mathbb{R}^+$ta định nghĩa 2 phép toán
   $$\forall x, y \in \mathbb{R}^+ \qquad x \oplus y = xy$$
   $$\forall a \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^+ \qquad a \times x = x^a$$
   Biết rằng $(\mathbb{R}^+, \oplus, *)$ là không gian vectơ. Tìm cơ sở, số chiều của không gian đó

5. $$V = \left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \text{ sao cho } a, b \in \mathbb{R} \right\}$$
   Biết rằng $V$ cùng với phép cộng hai ma trận và phép nhân 1 số với 1 ma trận là một không gian vectơ. Tìm cơ sở và số chiều của $V$.

[1]

[1]Đánh máy: NGUYỄN NGỌC QUYÊN, Ngày: 12/03/2005