ĐẠI SỐ CƠ BẢN
(ÔN THI THẠC SĨ TOÁN HỌC)
Bài 12. Không gian vectơ con

PGS TS Mỵ Vinh Quang

Ngày 28 tháng 2 năm 2006

1 Định nghĩa và các ví dụ

1.1 Định nghĩa

Cho V là không gian vectơ. Tập con U (khác rỗng) của V gọi là không gian vectơ con của V nếu các phép toán cộng và phép toán nhân vô hướng của V thu hẹp trên U là các phép toán trong U, đồng thời U cùng với các phép toán đó làm thành một không gian vectơ.

Từ định nghĩa không gian vectơ con, ta dễ dàng có được kết quả dưới đây.

1.2 Tiêu chuẩn của không gian vectơ con

Tập con U (khác rỗng) của không gian vectơ V là không gian vectơ con của V khi và chỉ khi:

1. Với mọi α, $\beta \in U$, ta có: $\alpha + \beta \in U$
2. Với mọi $\alpha \in U$, ta có $-\alpha \in U$

Như vậy, việc kiểm tra tập con U của V có là không gian vectơ con hay không khá đơn giản: ta chỉ việc kiểm tra xem U có các tính chất 1 và 2 hay không. Bạn đọc có thể vận dụng tiêu chuẩn trên để tự kiểm tra các ví dụ sau.

1.3 Các ví dụ

1.3.1 Ví dụ 1

Tập $\{0\}$ chỉ gồm vectơ-không là không gian vectơ con của V.
Tập V cũng là không gian vectơ con của V.
Các không gian con $\{0\}$, V gọi là các không gian vectơ con tầm thường của V.

1.3.2 ví dụ 2

$A = \{(x_1, \dots, x_n) \,|\, x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\} \subset \mathbb{R}^n$ là không gian con của $\mathbb{R}^n$.

$B = \{(x_1, \dots, x_n) \,|\, x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq 0\} \subset \mathbb{R}^n$ không là không gian con của $\mathbb{R}^n$, có thể dễ dàng kiểm tra B không có tính chất 2.

1.3.3 Ví dụ 3

Tập $\mathbb{R}_n[x]$ gồm đa thức không và các đa thức hệ số thực có bậc $\leq n$ là không gian con của $\mathbb{R}[x]$.

Tập các đa thức hệ số thực bậc n không là không gian con của $\mathbb{R}[x]$ vì cả 2 điều kiện 1 và 2 đều không được thỏa mãn.

1.3.4 Ví dụ 4

Tập $T_n(\mathbb{R})$ các ma trận tam giác trên cấp n là không gian con của không gian $M_n(\mathbb{R})$ các ma trận vuông cấp n.

1.4 Số chiều của không gian con

Liên quan đến số chiều của không gian vectơ con, ta có định lý sau:
Nếu U là không gian vectơ con của V thì $\dim U \leq \dim V$ *và* $\dim U = \dim V \Leftrightarrow U = V$.

Chứng minh
Giả sử $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ là cơ sở của U; $\beta_1, \ldots, \beta_n$ là cơ sở của V. Vì $U \subset V$ nên hệ vectơ (α) biểu thị tuyến tính được qua hệ (β). Do đó theo bổ đề cơ bản, ta có $m \leq n$, tức là $\dim U \leq \dim V$.

Nếu $\dim U = \dim V = n$ thì $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ là hệ độc lập tuyến tính có đúng $n = \dim V$ vectơ nên $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ là cơ sở của V. Do đó $U = V$

2 Một số các không gian con

2.1 Không gian giao và không gian tổng

Dùng tiêu chuẩn không gian vectơ con, ta có thể dễ dàng chứng minh được các kết quả sau:

- Nếu A, B là các không gian vectơ con của V thì $A \cap B$ là không gian vectơ con của V.

  Tổng quát, giao của một họ tùy ý các không gian vectơ con của V là không gian vectơ con của V.

- Cho A, B là các không gian vectơ con của V, ta định nghĩa:

$$A + B := \{x = \alpha + \beta \,|\, \alpha \in A, \beta \in B\} \subset V$$

$$(x \in A + B \Leftrightarrow x = \alpha + \beta \text{ với } \alpha \in A, \beta \in B)$$

  Khi đó, $A + B$ là không gian vectơ con của V gọi là không gian tổng của các không gian con A và B.

Liên quan đến số chiều của không gian giao và không gian tổng ta có định lý sau.
Định lý. Nếu A, B là các không gian con của không gian vectơ V (hữu hạn chiều) thì:

$$\dim(A + B) = \dim A + \dim B - \dim(A + B)$$

Chứng minh. Giả sử $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ là cơ sở của $A \cap B$ ($\dim A \cap B = r$). Vì $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ là hệ vectơ độc lập tuyến tính của A nên ta có thể bổ sung thêm các véctơ để được hệ vectơ $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_s$ là cơ sở của A ($\dim A = r + s$).

Tương tực, ta có thể bổ sung thêm các vectơ để được hệ vectơ $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \gamma_1, \ldots, \gamma_t$ là cơ sở của B ($\dim B = r + t$).

Ta chứng minh hệ vectơ $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_s, \gamma_1, \ldots, \gamma_t$ là cơ sở của $A + B$. Thật vậy:

- $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_s, \gamma_1, \ldots, \gamma_t$ là hệ sinh vì: với mọi $x \in A + B$, ta có $x = y + z$ với $y \in A, z \in B$.

  Vì $y \in A$ nên $y = a_1\alpha_1 + \cdots + a_r\alpha_r + b_1\beta_1 + \cdots + b_s\beta_s$

  Vì $z \in B$ nên $z = a'_1\alpha_1 + \cdots + a'_r\alpha_r + c_1\gamma_1 + \cdots + c_t\gamma_t$

  trong đó $a_i, a'_i, b_j, c_k \in \mathbb{R}$.

  Khi đó, $x = (a_1 + a'_1)\alpha_1 + \cdots + (a_r + a'_r)\alpha_r + b_1\beta_1 + \cdots + b_s\beta_s + c_1\gamma_1 + c_t\gamma_t$

  Vậy hệ trên là hệ sinh của $A + B$.

- $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_s, \gamma_1, \ldots, \gamma_t$ là hệ vectơ độc lập tuyến tính.

  Giả sử $a_1\alpha_1 + \cdots + a_r\alpha_r + b_1\beta_1 + \cdots + b_s\beta_s + c_1\gamma_1 + \cdots + c_t\gamma_t = 0 \quad (1)$

  trong đó $a_i, b_j, c_k \in \mathbb{R}$.

  Xét vectơ $x = a_1\alpha_1 + \cdots + a_r\alpha_r + b_1\beta_1 + \cdots + b_s\beta_s = -c_1\gamma_1 - \cdots - c_t\gamma_t \quad (2)$

  Vì $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_s$ là cơ sở của A nên $x \in A$. Mặt khác, $\gamma_1, \ldots, \gamma_t \in B$ nên $x \in B$. Do đó $x \in A \cap B$. Bởi vậy, $x = a'_1\alpha_1 + \cdots + a'_r\alpha_r \quad (3) \quad$ với $a'_i \in \mathbb{R}$.

  Từ (2) và (3) ta có:

  $(a_1 - a'_1)\alpha_1 + \cdots + (a_r - a'_r)\alpha_r + b_1\beta_1 + \cdots + b_s\beta_s = 0$

  Vì $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_s$ độc lập tuyến tính nên $b_1 = b_2 = \cdots = b_s = 0$.

  Thay vào (1) ta có:

  $$a_1\alpha_1 + \cdots + a_r\alpha_r + c_1\gamma_1 + \cdots + c_t\gamma_t = 0$$

  Do đó, $a_1 = \cdots = a_r = c_1 = \cdots = c_t = 0$

  Vậy hệ trên độc lập tuyến tính

Như vậy, ta đã chứng minh được hệ vectơ $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_s, \gamma_1, \ldots, \gamma_t$ là cơ sở của $A+B$. Do đó:

$$\begin{aligned}\dim(A + B) &= r + s + t \\ &= (r + s) + (r + t) - r \\ &= \dim A + \dim B - \dim(A \cap B)\end{aligned}$$

2.2 Không gian con sinh bởi một hệ vectơ

Cho V là không gian vectơ, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ là hệ vectơ của V. Ta định nghĩa:

$$\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle := \{x = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_n\alpha_n \,|\, a_i \in \mathbb{R}\} \subset V$$

$$(x \in V \Leftrightarrow \text{ Tồn tại } a_i \in \mathbb{R} \text{ để } x = a_1\alpha_1 + \cdots + a_n\alpha_n)$$

Dùng tiêu chuẩn không gian vectơ con, ta có ngay $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle$ là không gian vectơ con của V. Không gian con này gọi là không gian con của V sinh bởi hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ (hay còn gọi là bao tuyến tính của hệ vectơ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$).

Từ định nghĩa, ta có: $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ chính là một hệ sinh của không gian vectơ con $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle$. Bởi vậy, *mọi hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ đều là hệ sinh, do đó là cơ sở của không gian vectơ con $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle$.*

2.3 Không gian con các nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Cho hệ phương trình tuyến tính thuần nhất m phương trình, n ẩn.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

Mỗi nghiệm của hệ (I) có thể xem là một vectơ trong không gian $\mathbb{R}^n$. Dùng tiêu chuẩn không gian vectơ con có thể dễ dàng chứng minh tập nghiệm N của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất (I) là không gian vectơ con của $\mathbb{R}^n$. Không gian con này gọi là không gian con các nghiệm của hệ (I).

Nếu ta ký hiệu $r = \operatorname{rank} A$ thì số chiều của không gian con các nghiệm của hệ (I): $\dim N = n - r$. Cơ sở của không gian nghiệm N của hệ (I) ta gọi là hệ nghiệm cơ bản của hệ (I). Để tìm hệ nghiệm cơ bản của hệ (I) (cơ sở của không gian nghiệm N), ta làm như sau:

- Giải hệ phương trình (I), hệ có nghiệm tổng quát phụ thuộc $n - r$ tham số.
- Giả sử các tham số là $x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-r}}$.

  Cho $x_{i_1} = 1, x_{i_2} = 0, \ldots, x_{i_{n-r}} = 0$, tức là $(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n-r}}) = (1, 0, \ldots, 0)$. Tính các x_i còn lại theo công thức nghiệm tổng quát, ta sẽ được một nghiệm của hệ (I) ký hiệu là α_1.
- Tương tự với $(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, \ldots, x_{i_{n-r}}) = (0, 1, 0, \ldots, 0) \ldots (x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n-r}}) = (0, 0, \ldots, 1)$, ta sẽ thu được các nghiệm $\alpha_2, \ldots, \alpha_{n-r}$.

  Khi đó, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-r}$ là cơ sở của N (là hệ nghiệm cơ bản của hệ (I)).

Bạn đọc sẽ thấy rõ quá trình trên thông qua ví dụ cụ thể sau:
Ví dụ. Tìm cơ sở của không gian nghiệm N của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Giải. Đầu tiên ta giải hệ đã cho.
Biến đổi ma trận các hệ số mở rộng:

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1^* & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1^* & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1^* & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\operatorname{rank} \overline{A} = 3$, hệ có vô số nghiệm phụ thuộc hai tham số là x_2, x_5. Ta có:
$x_4 = 2x_5$
$x_3 = x_4 + 2x_5 = 4x_5$
$x_1 = -2x_2 - 2x_4 - x_5 = -2x_2 - 5x_5$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ là:

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 - 5x_5 \\ x_3 = 4x_5 \\ x_4 = 2x_5 \\ x_2, x_5 \text{ tùy ý} \end{cases}$$

Chọn $x_2 = 1$, $x_5 = 0$, ta sẽ có $x_1 = -2$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, ta được vectơ $\alpha_1 = (-2, 1, 0, 0, 0)$.
Chọn $x_2 = 0$, $x_5 = 1$, ta sẽ có $x_1 = -5$, $x_3 = 4$, $x_4 = 2$, ta được vectơ $\alpha_2 = (-5, 0, 4, 2, 1)$.
Vậy cơ sở của không gian nghiệm N của hệ trên là hệ $\{\alpha_1, \alpha_2\}$, $N = \langle\alpha_1, \alpha_2\rangle$, $\dim N = 2$.

2.4 Một vài nhận xét

Cho A và B là các không gian vectơ con của V. Nếu $A = \langle\alpha_1, \ldots, \alpha_m\rangle$, $B = \langle\beta_1, \ldots, \beta_n\rangle$ thì $A + B = \langle\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_n\rangle$.

Thật vậy, vì $A \subset A + B$, $B \subset A + B$ nên các vectơ $\alpha_i, \beta_j \in A + B$, và do đó ta có $\langle\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_n\rangle \subset A + B$

Ngược lại, nếu $x \in A + B$ thì $x = y + z$ trong đó $y \in A$, $z \in B$. Ta có $y \in A$ nên $y = a_1\alpha_1 + \cdots + a_m\alpha_m$, đồng thời $z \in B$ nên $z = b_1\beta_1 + \cdots + b_n\beta_n$, với $a_i, b_j \in \mathbb{R}$.

Bởi vậy, $x = y + z = a_1\alpha_1 + \cdots + a_m\alpha_m + b_1\beta_1 + \cdots + b_n\beta_n \in A + B$.

Từ nhận xét trên ta có chú ý sau:

Nếu $A = \langle\alpha_1, \ldots, \alpha_m\rangle$, $B = \langle\beta_1, \ldots, \beta_n\rangle$ thì $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_n$ là một hệ sinh của $A+B$ và do đó hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ vectơ $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_n$ là cơ sở của $A+B$.

* Nếu A là không gian vectơ con của không gian vectơ hữu hạn chiều V thì A luôn có thể viết dưới dạng $A = \langle\alpha_1, \ldots, \alpha_m\rangle$.

Thật vậy, giả sử $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ là một cơ sở (hoặc hệ sinh) bất kỳ của A thì ta có ngay $A = \langle\alpha_1, \ldots, \alpha_m\rangle$.

* Nếu A là không gian vectơ con của không gian R^n thì A có thể xem như không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có n ẩn nào đó.

Thật vậy, giả sử $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ là cơ sở của A thì $A = \langle\alpha_1, \ldots, \alpha_m\rangle$. Vectơ $x = (a_1, \ldots, a_n) \in A$ khi và chỉ khi phương trình vectơ $x = x_1\alpha_1 + \cdots + x_m\alpha_m \quad (x_i \in \mathbb{R})$ có nghiệm, khi và chỉ khi $x = (a_1, \ldots, a_n)$ là nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất nào đó. Bạn đọc có thể thấy rõ điều này qua ví dụ sau.

Ví dụ. Trong $\mathbb{R}^4$ cho các vectơ $\alpha_1 = (1, -1, 0, 1), \alpha_2 = (1, 1, 1, 0)$, $\alpha_3 = (2, 0, 1, 1)$ và cho không gian con $A = \langle\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\rangle$.

Tìm một điều kiện cần và đủ để vectơ $x = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in A$.

Giải. Vectơ $x \in A$ khi và chỉ khi phương trình $(a_1, a_2, a_3, a_4) = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3$ có nghiệm, nghĩa là hệ phương trình

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & a_1 \\ -1 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & 1 & a_3 \\ 1 & 0 & 1 & a_4 \end{array}\right] \quad (*)$$

có nghiệm.

Biến đổi hệ (*):

$$(*) \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & a_1 \\ 0 & 2 & 2 & a_1 + a_2 \\ 0 & 1 & 1 & a_3 \\ 0 & -1 & -1 & -a_1 + a_4 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & a_1 \\ 0 & 2 & 2 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 + a_2 - 2a_3 \\ 0 & 0 & 0 & -a_1 + a_3 + a_4 \end{array}\right]$$

Hệ (*) có nghiệm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a_1 + a_2 - 2a_3 = 0 \\ -a_1 + a_3 + a_4 = 0 \end{cases}$$

Do đó, điều kiện cần và đủ để vectơ $x = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in A$ là: $\begin{cases} a_1 + a_2 - 2a_3 = 0 \\ -a_1 + a_3 + a_4 = 0 \end{cases}$

Và do đó, A chính là không gian nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ -x_1 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Bài tập

13. Cho A, B là các không gian vectơ con của không gian vectơ V. Chứng minh rằng $A \cup B$ là không gian vectơ con của V khi và chỉ khi $A \subset B$ hoặc $B \subset A$.

14. Cho V là không gian vectơ và A là không gian vectơ con của V. Chứng minh rằng tồn tại không gian vectơ con B của V sao cho $A + B = V$, $A \cap B = \{0\}$.

15. Trong $\mathbb{R}^4$ cho các vectơ: $u_1 = (1, 1, 0, 0)$, $u_2 = (1, 1, 1, 1)$, $u_3 = (0, -1, 0, 1)$, $u_4 = (1, 2, -1, -2)$ và $E = \langle u_1, u_2, u_3, u_4 \rangle$.

    (a) Tìm một cơ sở và số chiều của E.

    (b) Tìm một điều kiện cần và đủ để vectơ $x = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in E$.

    (c) Cho vectơ $v_1 = (1, a^3, a, 1)$, $v_2 = (1, b, b^3, 1)$, $v_3 = (ab + 1, ab, 0, 1)$. Tìm a, b để v_1, v_2, v_3 là cơ sở của E.

16. Trong $\mathbb{R}^4$ cho các không gian con:

    $U = \langle (2, 0, 1, 1), (1, 1, 1, 1), (0, -2, -1, -1) \rangle$

    $$V = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \,\middle|\, \begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \right\}$$

    (a) Tìm cơ sở, số chiều của các không gian vectơ U, V, $U + V$.

    (b) Tìm cơ sở, số chiều của không gian vectơ con $U \cap V$.

17. Cho U là không gian vectơ con của V. Biết rằng $\dim U = m < \dim V = n$. Chứng minh:

    (a) Có cơ sở của V không chứa vectơ nào của U.

    (b) Có cơ sở của V chứa đúng k vectơ của U $(0 \le k \le m)$.

18. Cho A, B là các ma trận cấp $m \times n$ $(A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R}))$. Chứng minh:

$$\operatorname{rank}(A + B) \le \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$$