ĐẠI SỐ CƠ BẢN
(ÔN THI THẠC SĨ TOÁN HỌC)
Bài 13. Bài tập về không gian véctơ

PGS TS Mỵ Vinh Quang

Ngày 10 tháng 3 năm 2006

1. Xét xem $\mathbb{R}^2$ có là không gian véctơ hay không với phép cộng và phép nhân vô hướng sau:

$$\begin{aligned}(a_1, a_2) + (b_1, b_2) &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2)\\ a_*(a_1, a_2) &= (aa_1, 0)\end{aligned}$$

Giải. Bạn đọc có thể kiểm tra trực tiếp rằng 7 điều kiện đầu của không gian véctơ đều thỏa mãn, riêng điều kiện thứ 8 không thỏa mãn vì với $\alpha = (1, 1)$, khi đó: $1_*\alpha = 1_*(1, 1) = (1, 0) \neq \alpha$.
Vậy $\mathbb{R}^2$ với các phép toán trên không là không gian véctơ vì không thỏa mãn điều kiện 8. □

2. Chứng minh rằng một không gian véctơ hoặc chỉ có một véctơ, hoặc có vô số véctơ.

Giải. Giả sử V là không gian véctơ và V có nhiều hơn 1 véctơ, ta chứng minh V chứa vô số véctơ. Thật vậy, vì V có nhiều hơn một véctơ nên tồn tại véctơ $\alpha \in V$, $\alpha \neq 0$. Khi đó, V chứa các véctơ $a\alpha$ với $a \in \mathbb{R}$. Mặt khác:

$$\begin{aligned}\forall a, b \in \mathbb{R}, a\alpha = b\alpha &\Leftrightarrow (a - b)\alpha = 0\\ &\Leftrightarrow a - b = 0 \quad (\text{ vì } \alpha \neq 0)\\ &\Leftrightarrow a = b\end{aligned}$$

Bởi vậy có vô số các véctơ dạng $a\alpha$, $a \in \mathbb{R}$, do đó V chứa vô số véctơ. □

3. Xét sự ĐLTT, PTTT. Tìm hạng và hệ con ĐLTT tối đại của các hệ véctơ sau:

a $\alpha_1 = (1, 0, -1, 0)$, $\alpha_2 = (1, 2, 1, 1)$, $\alpha_3 = (3, 2, 3, 2)$, $\alpha_4 = (1, 1, 2, 1)$

b $\alpha_1 = (1, 0, 0, -1)$, $\alpha_2 = (2, 1, 1, 0)$, $\alpha_3 = (1, 1, 1, 1)$, $\alpha_4 = (1, 2, 3, 4)$, $\alpha_5 = (0, 1, 2, 3)$.

Giải. **a.** Lập ma trận **A** tương ứng và tìm hạng của ma trận **A**:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$
$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vậy rank$\mathbf{A} = 3$, ít hơn số véctơ, nên hệ trên là hệ PTTT. Vì 3 dòng khác không của ma trận ứng với các véctơ α_1, α_4, α_2, nên hệ con ĐLTT tối đại của $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ là $\alpha_1, \alpha_4, \alpha_2$ và rank$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} = 3$.

b. Giải tương tự câu a., bạn đọc tự giải.

□

4. Cho hệ véctơ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ ĐLTT trong không gian véctơ V. Chứng minh

a. Hệ véctơ $\beta_1 = \alpha_1$, $\beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2$, ..., $\beta_m = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m$ cũng ĐLTT.

b. Hệ véctơ:

$$\begin{array}{ccccc} \gamma_1 & = & a_{11}\alpha_1 + & \ldots & +a_{1m}\alpha_m \\ \gamma_2 & = & a_{21}\alpha_1 + & \ldots & +a_{2m}\alpha_m \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_m & = & a_{m1}\alpha_1 + & \ldots & +a_{mm}\alpha_m \end{array}$$

ĐLTT khi và chỉ khi det$\mathbf{A} \neq 0$, trong đó

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} \end{bmatrix}$$

Giải. **a.** Giả sử $b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + \ldots + b_m\beta_m = 0$ với $b_i \in \mathbf{R}$

$\Leftrightarrow b_1\alpha_1 + b_2(\alpha_1 + \alpha_2) + \ldots + b_m(\alpha_1 + \ldots + \alpha_m) = 0$

$\Leftrightarrow (b_1 + \ldots + b_m)\alpha_1 + (b_2 + \ldots + b_m)\alpha_2 + \ldots + b_m\alpha_m = 0$

Vì $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ ĐLTT nên ta có:

$$\begin{cases} b_1 + b_2 + \ \ldots \ + b_{m-1} + b_m = 0 \\ \quad\ \ b_2 + \ \ldots \ + b_{m-1} + b_m = 0 \\ \qquad\quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \qquad\qquad\quad b_{m-1} + b_m = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad b_m = 0 \end{cases}$$

Suy ngược từ dưới lên, ta có: $b_m = b_{m-1} = \ldots = b_1 = 0$.

Vậy $\beta_1, \ldots, \beta_m$ ĐLTT.

b Giả sử $c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + \ldots + c_m\gamma_m = 0$ với $c_j \in \mathbf{R}$

$\Leftrightarrow (a_{11}c_1 + a21c_2 + \ldots + a_{m1}c_m)\alpha_1 + (a_{12}c_1 + a_{22}c_2 + \ldots + a_{m2}c_m)\alpha_2 + \ldots + (a_{1m}c_1 + a_{2m}c_2 + \ldots + a_{mm}c_m)\alpha_m = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}c_1 + a_{21}c_2 + \ldots + a_{m1}c_m = 0 \\ a_{12}c_1 + a_{22}c_2 + \ldots + a_{m2}c_m = 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{1m}c_1 + a_{2m}c_2 + \ldots + a_{mm}c_m = 0 \end{cases} \qquad (*)$$ Hệ véctơ $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$

ĐLTT khi và chỉ khi hệ phương trình tuyến tính $(*)$ có nghiệm duy nhất $(0, 0, \ldots, 0)$ khi và chỉ khi ma trận các hệ số của hệ $(*)$ không suy biến khi và chỉ khi $\det\mathbf{A} \neq 0$.

□

5. Hệ véctơ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ biểu thị tuyến tính được qua hệ véctơ $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$. Chứng minh $\text{rank}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \leqslant \text{rank}\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$.

   Giải. Giả sử $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_k}$ và $\beta_{j_1}, \ldots, \beta_{j_l}$ lần lượt là hệ con ĐLTT tối đại của các hệ véctơ $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ và $\beta_1, \ldots, \beta_n$. Vì hệ $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ biểu thị tuyến tính được qua hệ $\beta_1, \ldots, \beta_n$ nên hệ $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_k}$ biểu thị tuyến tính được qua hệ $\beta_{j_1}, \ldots, \beta_{j_l}$, mặt khác hệ $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_k}$ độc lập tuyến tính nên theo Bổ đề cơ bản ta có $k \leqslant l$ tức là $\text{rank}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \leqslant \text{rank}\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$.
   □

6. Cho 2 hệ véctơ cùng hạng, hệ đầu biểu thị tuyến tính được qua hệ sau. Chứng minh 2 hệ véctơ tương đương.

   Giải. Giả sử $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ (α), $\beta_1, \ldots, \beta_n$ (β) thỏa mãn đề ra. Vì hai hệ véctơ cùng hạng nên ta có thể giả sử $\text{rank}(\alpha) = \text{rank}(\beta) = k$, đồng thời $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_k}$ và $\beta_{j_1}, \ldots, \beta_{j_k}$ lần lượt là hệ con ĐLTT tối đại của các hệ véctơ (α) và (β). Vì hệ (α) biểu thị tuyến tính được qua hệ (β) nên hệ $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_k}$ biểu thị tuyến tính được qua hệ $\beta_{j_1}, \ldots, \beta_{j_k}$, lại do hệ $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_k}$ ĐLTT nên theo Bổ đề cơ bản, ta có thể thay k véctơ $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_k}$, cho k véctơ $\beta_{j_1}, \ldots, \beta_{j_k}$ để được hệ véctơ mới $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_k}$ tương đương với hệ véctơ $\beta_{j_1}, \ldots, \beta_{j_k}$, tức là $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_k}$ tương đương với $\beta_{j_1}, \ldots, \beta_{j_k}$. Mặt khác, $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_k}$ tương đương với hệ (α), $\beta_{j_1}, \ldots, \beta_{j_k}$ tương đương với hệ (β), do đó ta có hệ (α) tương đương với hệ (β). □

7. Trong $\mathbb{R}^4$ cho hệ véctơ

$$u_1 = (1, 1, 1, 1), u_2 = (2, 3, -1, 0), u_3 = (-1, -1, 1, 1)$$

   Tìm điều kiện cần và đủ để hệ véctơ $u = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ biểu thị tuyến tính được qua hệ u_1, u_2, u_3.

   Giải. Véctơ u biểu thị tuyến tính được qua hệ u_1, u_2, u_3 khi và chỉ khi phương trình $u = y_1u_1 + y_2u_2 + y_3u_3$ có nghiệm khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm:

$$\left[\begin{array}{rrr|l} 1 & 2 & -1 & x_1 \\ 1 & 3 & -1 & x_2 \\ 1 & -1 & 1 & x_3 \\ 1 & 0 & 1 & x_4 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|l} 1 & 2 & -1 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & -x_1 + x_2 \\ 0 & -3 & 2 & -x_1 + x_3 \\ 0 & -3 & 2 & -x_1 + x_4 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|l} 1 & 2 & -1 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & -x_1 + x_2 \\ 0 & 0 & 2 & -4x_1 + 3x_2 + x_3 \\ 0 & 0 & 2 & -3x_1 + 2x_2 + x_4 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|l} 1 & 2 & -1 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & -x_1 + x_2 \\ 0 & 0 & 2 & -4x_1 + 3x_2 + x_3 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \end{array}\right]$$

   Do đó hệ có nghiệm khi và chỉ khi $x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0$. Bởi vậy véctơ $u = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ biểu thị tuyến tính được qua u_1, u_2, u_3 khi và chỉ khi $x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0$. □

8. Trong $\mathbb{R}_3[x]$ cho các hệ véctơ:

$$\begin{aligned} u_1 &= x^3 + 2x^2 + x + 1 \\ u_2 &= 2x^3 + x^2 - x + 1 \\ u_3 &= 3x^3 + 3x^2 - x + 2 \end{aligned}$$

Tìm điều kiện để véctơ $u = ax^3 + bx^2 + cx + d$ biểu thị tuyến tính được qua hệ u_1, u_2, u_3.

Giải. Cách giải bài này tương tự như bài tập 7. Chi tiết cách giải xin dành cho bạn đọc. □

9. Trong $\mathbb{R}^3$ cho các hệ véctơ:

$$u_1 = (1,2,1), u_2 = (2,-2,1), u_3 = (3,2,2) \qquad (U)$$

$$v_1 = (1,1,1), u_2 = (1,1,0), v_3 = (1,0,0) \qquad (V)$$

a. Chứng minh $(U), (V)$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$

b. Tìm các ma trận đổi cơ sở từ (U) sang (V) và từ (V) sang (U).

Giải. **a.** Lập ma trận **U** mà các dòng của **U** là các véctơ u_1, u_2, u_3

$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, ta có $\det\mathbf{U} = 2 \neq 0$.

Do đó hệ véctơ u_1, u_2, u_3 độc lập tuyến tính vì $\dim\mathbb{R}^3 = 3$ nên u_1, u_2, u_3 là cơ sở của $\mathbb{R}^3$. Tương tự v_1, v_2, v_3 là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b. Giải tương tự như ví dụ 1, bài 11, sau đây là chi tiết cách giải:

Để tìm ma trận $\mathbf{T}_{UV}$ ta giải 3 hệ sau:

$$\left[\begin{array}{rrr|r|r|r} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r|r|r} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -4 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r|r|r} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -6 & -4 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r|r|r} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 5 & 4 \end{array}\right]$$

Hệ 1: $a_3 = -\dfrac{1}{2},\ a_2 = -a_3 = \dfrac{1}{2},\ a_1 = 1 - 2a_2 - 3a_3 = \dfrac{3}{2}$

Hệ 2: $b_3 = \dfrac{5}{2},\ b_2 = 1 - a_3 = -\dfrac{3}{2},\ b_1 = 1 - 2b_2 - 3b_3 = -\dfrac{7}{2}$

Hệ 3: $c_3 = 2,\ c_2 = 1 - c_3 = -1,\ c_1 = 1 - 2c_2 - c_3 = -3$

Vậy $\mathbf{T}_{UV} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{7}{2} & -3 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 2 \end{bmatrix}$

Việc tìm ma trận $\mathbf{T}_{VU}$ xin dành cho bạn đọc.

□

10. Trong $\mathbb{R}^2$ cho các cơ sở (α), (β), (γ). Biết $\mathbf{T}_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{T}_{\gamma\beta} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ và cơ sở $(\gamma):\ \gamma_1 = (1,1),\ \gamma_2 = (1,0)$. Tìm cơ sở (α).

Giải. Đầu tiên ta tìm cơ sở (β):
Do $\mathbf{T}_{\gamma\beta} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ nên $\beta_1 = 3\gamma_1 + 2\gamma_2 = (5,3),\ \beta_2 = \gamma_1 + \gamma_2 = (2,1)$. Mặt khác ta có $\mathbf{T}_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ nên $\mathbf{T}_{\beta\alpha} = \mathbf{T}_{\alpha\beta}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ do đó:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\beta_1 + 2\beta_2 &&= (-1,-1) \\ \alpha_2 &= \beta_1 - \beta_2 &&= (3,2) \end{aligned}$$

Vậy cơ sở $(\alpha) = \alpha_1 = (-1,-1),\ \alpha_2 = (3,2)$.

□

11. Cho $\mathbb{R}^+$ là tập các số thực dương. Trong R^+ ta định nghĩa 2 phép toán

    (a) $\forall x, y \in R^+ : x \oplus y = xy$

    (b) $\forall a \in R, x \in R^+ : a * x = x^a$

    Biết rằng, $(R^+, \oplus, *)$ là KGVT. Tìm cơ sở, số chiều của KGVT R^+.

    Giải. Với mọi véctơ $x \in R^+$ ta có:
    $x \oplus 1 = x.1 = x$ do đó véctơ không trong KGVT R^+ là 1.
    Với mỗi véc tơ $\alpha \in R^+, \alpha$ khác véctơ không (tức là $\alpha \neq 1$) ta chứng minh $\{\alpha\}$ là hệ sinh của R^+. Thật vậy $\forall x \in R^+$ ta có: $x = \alpha^{\log_\alpha x} = (\log_\alpha x) * \alpha = a * \alpha$ trong đó $a = \log_\alpha x \in R$. Vậy x luôn biểu thị tuyến tính được qua hệ gồm 1 véctơ $\{\alpha\}$.
    Mặt khác vì α khác véctơ không nên hệ $\{\alpha\}$ là hệ véctơ độc lập tuyến tính. Vậy dim $\mathbb{R}^+ = 1$ và cơ sở của R^+ là hệ gồm 1 véctơ $\{\alpha\}$ với α là số thực dương, khác 1. □

12. Cho $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$
    biết rằng V cùng với phép cộng 2 ma trận và phép nhân 1 số với ma trận là KGVT.
    Tìm cơ sở, số chiều của V.

    Giải. Xét 2 véctơ trong V:
    $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
    Khi đó, với mọi véctơ $X = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \in V$ ta luôn có $X = a.A_1 + b.A_2$. Vậy $\{A_1, A_2\}$ là 1 hệ sinh của V.
    Mặt khác, với mọi $a, b \in R$ ta có
    $a.A_1 + b.A_2 = 0 \Leftrightarrow a.A_1 + b.A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow a = 0, b = 0$
    do hệ véctơ $\{A_1, A_2\}$ độc lập tuyến tính.
    Vậy $\{A_1, A_2\}$ là cơ sở của V và dim $V = 2$ □

1

[1]Đánh máy: LÂM HỮU PHƯỚC, Ngày: 15/02/2006