ĐẠI SỐ CƠ BẢN
(ÔN THI THẠC SĨ TOÁN HỌC)
Bài 14. Bài tập về không gian véctơ (tiếp theo)

PGS TS Mỵ Vinh Quang

Ngày 28 tháng 2 năm 2006

13. Cho A, B là các KGVT con của KGVT V. Chứng minh rằng $A \cup B$ là KGVT con của KGVT V khi và chỉ khi $A \subset B$ hoặc $B \subset A$.

Giải. Nếu $A \subset B$ hoặc $B \subset A$ thì $A \cup B = B$ hoặc $A \cup B = A$ nên $A \cup B$ là KGVT con của V.

Ngược lại, giả sử $A \cup B$ là KGVT con của V nhưng $A \not\subset B$ và $B \not\subset A$. Khi đó tồn tại $x \in A$, $x \notin B$ và $y \in B$, $y \notin A$. Ta chứng minh $x + y \notin A \cup B$. Thật vậy, nếu $z = x + y \in A \cup B$ thì $z \in A$, hoặc $z \in B$, do đó $y = z - x \in A$ hoặc $x = z - y \in B$. Điều này trái với cách chọn x, y. Vậy $x + y \notin A \cup B$. Như vậy, tồn tại x, $y \in A \cup B$ nhưng $x + y \notin A \cup B$, do đó $A \cup B$ không là KGVT con của V (!). Mâu thuẫn chứng tỏ $A \subset B$ hoặc $B \subset A$. $\square$

14. Cho V là KGVT, A là KGVT con của V. Chứng minh tồn tại KGVT con B của V sao cho $A + B = V$ và $A \cap B = \{0\}$

Giải. Giả sử $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ là một cơ sở trong A, khi đó $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ là hệ véctơ độc lập tuyến tính trong V, do đó ta có thể bổ sung thêm các véctơ, để được hệ véctơ $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n$ là cơ sở của V. Đặt $B = \langle \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n \rangle$. Khi đó, vì $A = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_k \rangle$ nên $A + B = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n \rangle = V$. Mặt khác, nếu $x \in A \cap B$, thì tồn tại các số a_i, $b_j \in \mathbb{R}$ sao cho

$$x = a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k \qquad \text{và} \qquad x = b_{k+1}\alpha_{k+1} + \ldots + b_n\alpha_n$$

do đó $a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k - b_{k+1}\alpha_{k+1} - \ldots - b_n\alpha_n = 0$, vì hệ véctơ $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ ĐLTT nên $a_i = 0$, $b_j = 0$, do đó $x = 0$. Vậy, $A \cap B = \{0\}$. $\square$

15. Trong $\mathbb{R}^4$ cho các véctơ: $u_1 = (1, 1, 0, 0)$, $u_2 = (1, 1, 1, 1)$, $u_3 = (0, -1, 0, 1)$, $u_4 = (1, 2, -1, -2)$ và $E = \langle u_1, u_2, u_3, u_4 \rangle$.

a. Tìm cơ sở, số chiều của E.

b. Tìm một điều kiện cần và đủ để véctơ $x = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in E$.

c Cho $v_1 = (1, a^3, a, 1)$, $v_2 = (1, b, b^3, 1)$, $v_3 = (ab + 1, ab, 0, 1)$. Tìm a, b để v_1, v_2, v_3 là cơ sở của E.

Giải. **a.** Để tìm cơ sở, số chiều của E, ta tìm hệ con ĐLTT tối đại của hệ sinh $u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4$ của E. Lập và biến đổi ma trận:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

Ma trận bậc thang sau cùng bậc 3, và 3 dòng khác không ứng với các véctơ $u_1,\ u_3,\ u_2$. Do đó, $\dim E = 3$ và cơ sở của E là hệ $\{u_1,\ u_2,\ u_3\}$ và $E = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$.

b. $x = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in E$ khi và chỉ khi phương trình véctơ $x = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3$ có nghiệm. Phương trình véctơ trên tương đương với hệ sau:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a_1 \\ 1 & 1 & -1 & a_2 \\ 0 & 1 & 0 & a_3 \\ 0 & 1 & 1 & a_4 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & -1 & -a_1 + a_2 \\ 0 & 1 & 0 & a_3 \\ 0 & 1 & 1 & a_4 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & -1 & -a_1 + a_2 \\ 0 & 1 & 1 & a_4 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & -1 & -a_1 + a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -a_3 + a_4 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & -1 & -a_1 + a_2 \\ 0 & 0 & 0 & -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 \end{array}\right]$$

Như vậy, hệ có nghiệm khi và chỉ khi $-a_1 + a_2 - a_3 + a_4 = 0$.
Vậy $x = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in E \Leftrightarrow a_1 + a_3 = a_2 + a_4$.

c. Vì $\dim E = 3$ nên $\{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ là cơ sở của E khi và chỉ khi $v_1,\ v_2,\ v_3 \in E$ và $\{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ ĐLTT. Do câu b., $v_1 \in E \Leftrightarrow 1 + a = a^3 + 1 \Leftrightarrow a = 0, 1, -1$, $\quad v_2 \in E \Leftrightarrow 1 + b^3 = 1 + b \Leftrightarrow b = 0, 1, -1$. Xét các trường hợp có thể xảy ra:

- $a = 0$ hoặc $b = 0$, khi đó $v_1 = v_2$ hoặc $v_2 = v_3$, hệ $\{v_1, v_2, v_3\}$ phụ thuộc tuyến tính nên không là cơ sở của E.
- $a = b$ thì $v_1 = v_2$ nên hệ $\{v_1, v_2, v_3\}$ không là cơ sở của E.
- Còn lại 2 khả năng là $a = 1,\ b = -1$ hoặc $a = -1,\ b = 1$, kiểm tra trực tiếp ta thấy hệ $\{v_1, v_2, v_3\}$ ĐLTT, do đó là cơ sở của E.

□

16. Trong $\mathbb{R}^4$ cho các KGVT con

$$U = \langle (2, 0, 1, 1), (1, 1, 1, 1), (0, -2, -1, -1) \rangle$$

$$V = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \;\middle|\; \begin{array}{rcl} x_1 - x_3 - x_4 & = & 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 & = & 0 \end{array} \right\}$$

a. Tìm cơ sở, số chiều của các KGVT con $U,\ V,\ U+V$.

b. Tìm cơ sở, số chiều của KGVT con $U \cap V$

Giải. **a.** • Dễ thấy cơ sở của U là các véctơ $\alpha_1 = (2,0,1,1),\ \alpha_2 = (1,1,1,1)$ và do đó $U = \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$.

Không gian con V chính là không gian nghiệm của hệ $\begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 &= 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \end{cases}$, bởi vậy cơ sở của V là hệ nghiệm cơ bản của hệ trên. Hệ trên có vô số nghiệm phụ thuộc 2 tham số $x_3,\ x_4$. Nghiệm tổng quát là $\begin{cases} x_1 &= x_3 + x_4 \\ x_2 &= x_3 - x_4 \end{cases}$, do đó hệ nghiệm cơ bản là: $\beta_1 = (1,1,1,0),\ \beta_2 = (1,-1,0,1)$. Vậy, cơ sở của V là $\beta_1,\ \beta_2$ và $\dim V = 2,\ V = \langle \beta_1, \beta_2 \rangle$.

• Vì $U = \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle, \quad V = \langle \beta_1, \beta_2 \rangle$ nên $U + V = \langle \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \rangle$, do đó hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ $\{\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2\}$ là cơ sở của $U+V$. Tính toán trực tiếp ta có kết quả $\dim(U+V) = 3$ và $\{\alpha_1, \alpha_2, \beta_1\}$ là một cơ sở của $U+V$.

b. Để tìm cơ sở của $U \cap V$, ta cần tìm điều kiện cần và đủ để véctơ $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in U$. Tương tự bài tập 15., $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in U$ khi và chỉ khi phương trình véctơ $x = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2$ có nghiệm, phương trình này tương đương với hệ sau:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 1 & 1 & x_3 \\ 1 & 1 & x_4 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_4 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 1 & 1 & x_3 \\ 2 & 1 & x_1 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_4 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & -x_4 + x_3 \\ 0 & -1 & x_1 - 2x_4 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_4 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 - x_4 \\ 0 & 0 & x_1 + x_2 - 2x_4 \end{array}\right]$$

Vậy véctơ $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in U \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_4 &= 0 \end{cases}$.

Do đó, $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in U \cap V \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_4 &= 0 \\ x_1 - x_3 - x_4 &= 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \end{cases} \qquad (*)$

Như vậy $U \cap V$ chính là không gian nghiệm của hệ $(*)$ và do đó cơ sở của $U \cap V$ chính là hệ nghiệm cơ bản của hệ $(*)$. Việc giải và tìm hệ nghiệm cơ bản của hệ $(*)$ xin dành cho bạn đọc. Kết quả hệ nghiệm cơ bản của $(*)$ là véctơ $\gamma = (2,0,1,1)$, do đó $\dim(U \cap V) = 1$. Cơ sở của $U \cap V$ là véctơ γ.

□

17. Cho U là không gian véctơ con của V. Biết $\dim U = m < \dim V = n$. Chứng minh

a. Có cơ sở của V không chứa véctơ nào của U.

b. Có cơ sở của V chứa đúng k véctơ độc lập tuyến tính của U. $(0 \le k \le m)$.

Giải. **a.** Đầu tiên ta chứng minh có cơ sở của V chứa đúng m véctơ của U. Thật vậy, giả sử $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ là cơ sở của U, $\beta_1, \ldots, \beta_n$ là cơ sở của V. Vì $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ ĐLTT và biểu thị tuyến tính được qua hệ $\beta_1, \ldots, \beta_n$ nên theo bổ đề cơ bản về hệ véctơ ĐLTT ta có thể thay m véctơ $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ cho m véctơ của hệ $\beta_1, \ldots, \beta_n$ để được hệ mới là hệ $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_{m+1}, \dots, \beta_n$ $(*)$ tương đương với hệ (β). Vì (β) là cơ sở của V nên hệ $(*)$ cũng là cơ sở của V. Cơ sở $(*)$ có đúng m véctơ thuộc U là $\alpha_1, \dots, \alpha_m$. Thật vậy, nếu có $\beta_k \in U$ $(k = m+1, \dots, n)$ thì β_k biểu thị tuyến tính được qua $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, do đó hệ $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_{m+1}, \dots, \beta_n$ PTTT, trái với hệ $(*)$ là cơ sở của V.

Tiếp tục ta chứng minh có cơ sở của V không chứa véctơ nào của U:
Vì hệ véctơ $(*)$ ĐLTT nên bằng cách kiểm tra trực tiếp, ta có hệ $\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_m + \beta_n, \beta_{m+1}, \dots, \beta_n$ cũng là hệ ĐLTT, do đó là cơ sở của V. Vì $\alpha_i \in U$, $\beta_n \notin U$ nên $\alpha_i + \beta_n \notin U$, do đó hệ véctơ trên chính là cơ sở của V không chứa véctơ nào của U.

b. Giả sử $v_1, \dots, v_n$ là cơ sở của V không chứa véctơ nào của U và giả sử $u_1, \dots, u_k$ là hệ véctơ ĐLTT của U. Vì $u_1, \dots, u_k$ biểu thị tuyến tính được qua $v_1, \dots, v_n$ nên theo bổ đề cơ bản về hệ véctơ ĐLTT, ta có thể thay k véctơ $u_1, \dots, u_k$ cho k véctơ của hệ $v_1, \dots, v_n$ để được hệ mới $u_1, \dots, u_k, v_{k+1}, \dots, v_n$ chính là cơ sở của V chứa đúng k véctơ của U.

$\square$

18. Cho $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ là các ma trận cấp $m \times n$. $(\mathbf{A},\ \mathbf{B} \in M_{m\times n}(\mathbb{R}))$. Chứng minh

$$\operatorname{rank}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \le \operatorname{rank}\mathbf{A} + \operatorname{rank}\mathbf{B}$$

Giải. Giả sử $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$; $\quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}$.

Ta đặt $\alpha_1 = (a_{11}, \dots, a_{1n}),\ \alpha_2 = (a_{21}, \dots, a_{2n}), \dots, \alpha_m = (a_{m1}, \dots, a_{mn})$ là các véctơ dòng của $\mathbf{A}$, khi đó $\operatorname{rank}\mathbf{A} = \operatorname{rank}\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$.
Tương tự ta đặt: $\beta_1 = (b_{11}, \dots, b_{1n}),\ \beta_2 = (b_{21}, \dots, b_{2n}), \dots, \beta_m = (b_{m1}, \dots, b_{mn})$ là các véctơ dòng của $\mathbf{B}$, khi đó $\operatorname{rank}\mathbf{B} = \operatorname{rank}\{\beta_1, \dots, \beta_m\}$.
Các véctơ dòng của ma trận $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ chính là các véctơ $\alpha_1+\beta_1, \dots, \alpha_m+\beta_m$ và $\operatorname{rank}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \operatorname{rank}\{\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_m + \beta_m\}$. Vậy ta cần chứng minh:

$$\operatorname{rank}\{\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_m + \beta_m\} \le \operatorname{rank}\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} + \operatorname{rank}\{\beta_1, \dots, \beta_m\}$$

Giả sử $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}$ là hệ con ĐLTT tối đại của hệ $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ (do đó, $\operatorname{rank}\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} = k$) và $\beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_l}$ là hệ con ĐLTT tối đại của hệ $\beta_1, \dots, \beta_m$ (do đó $\operatorname{rank}\{\beta_1, \dots, \beta_m\} = l$). Khi đó vì α_i biểu thị tuyến tính được qua hệ $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{j_k}$ và β_j biểu thị tuyến tính được qua hệ $\beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_l}$ nên $\alpha_i + \beta_i$ biểu thị tuyến tính được qua hệ véctơ $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}, \beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_l}$ tức là hệ véctơ $\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_m + \beta_m$ biểu thị tuyến tính được qua hệ véctơ $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}, \beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_l}$. Do đó, theo bài tập 5, ta có:

$$\operatorname{rank}\{\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_m + \beta_m\} \le \operatorname{rank}\{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}, \beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_l}\}$$
$$\le k + l = \operatorname{rank}\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} + \operatorname{rank}\{\beta_1, \dots, \beta_m\}$$

Vậy $\operatorname{rank}\{\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_m + \beta_m\} \le \operatorname{rank}\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} + \operatorname{rank}\{\beta_1, \dots, \beta_m\}$, tức là

$$\operatorname{rank}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \le \operatorname{rank}\mathbf{A} + \operatorname{rank}\mathbf{B}$$

$\square$

[1]

[1]Đánh máy: LÂM HỮU PHƯỚC, Ngày: 15/02/2006