ĐẠI SỐ CƠ BẢN
(ÔN THI THẠC SĨ TOÁN HỌC)
Bài 15. Ánh xạ tuyến tính

PGS TS Mỵ Vinh Quang

Ngày 28 tháng 2 năm 2006

1 Định nghĩa và ví dụ

1.1 Định nghĩa

Cho V và U là hai không gian véctơ, ánh xạ $f : V \to U$ là ánh xạ tuyến tính nếu f thỏa mãn 2 tính chất sau:

(i) Với mọi $\alpha,\ \beta \in V :\ f(\alpha + \beta) = f(\alpha) + f(\beta)$

(ii) Với mọi $a \in \mathbb{R}, \alpha \in V :\ f(a\alpha) = af(\alpha)$

Một ánh xạ tuyến tính $f : V \to V$ gọi là một phép biến đổi tuyến tính của V.

Như vậy, để kiểm tra ánh xạ $f : V \to U$ có là ánh xạ tuyến tính không, ta cần phải kiểm tra f có các tính chất (i) và (ii) không. Bạn đọc có thể dễ dàng tự kiểm tra các ví dụ sau:

1.2 Các ví dụ

Ví dụ 1. Ánh xạ không:

$$\begin{array}{rcccl} 0 & : & V & \longrightarrow & U \\ & & \alpha & \longmapsto & 0(\alpha) = 0 \end{array}$$

là ánh xạ tuyến tính.

Ví dụ 2. Ánh xạ đồng nhất:

$$\begin{array}{rcccl} i_d & : & V & \longrightarrow & V \\ & & \alpha & \longmapsto & i_d(\alpha) = \alpha \end{array}$$

là ánh xạ tuyến tính.

Ví dụ 3. Ánh xạ đạo hàm:

$$\begin{array}{rcccl} \theta & : & \mathbb{R}[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}[x] \\ & & f(x) & \longmapsto & \theta(f) = f'(x) \end{array}$$

là ánh xạ tuyến tính.

Ví dụ 4. Phép chiếu

$$\begin{array}{rccl} p & : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto & p(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2) \end{array}$$

là ánh xạ tuyến tính.

Dạng tổng quát của một ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ được cho trong bài tập 1.

2 Các tính chất cơ bản của ánh xạ tuyến tính

Cho U, V là các không gian véctơ, và $f : V \to U$ là ánh xạ tuyến tính. Khi đó:

a. $f(0_V) = 0_U, \quad f(-\alpha) = -f(\alpha)$

b. Với mọi $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R},\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in V$ ta có

$$f(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_n\alpha_n) = a_1 f(\alpha_1) + a_2 f(\alpha_2) + \ldots + a_n f(\alpha_n)$$

c. Ánh xạ tuyến tính biến hệ PTTT thành hệ PTTT. Tức là nếu $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ là hệ PTTT trong V thì $f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots, f(\alpha_n)$ là hệ PTTT trong U.

Thật vậy, nếu $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ là hệ PTTT thì tồn tại $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ không đồng thời bằng không sao cho $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_n\alpha_n = 0$. Do đó $f(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_n\alpha_n) = f(0)$ suy ra $a_1 f(\alpha_1) + a_2 f(\alpha_2) + \ldots + a_n f(\alpha_n) = 0$ mà $a_1, a_2, \ldots, a_n$ không đồng thời bằng không nên $f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots, f(\alpha_n)$ PTTT.

d. Ánh xạ tuyến tính không làm tăng hạng của một hệ véctơ, tức là với mọi $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in V$ $\text{rank}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \geq \text{rank}\{f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_n)\}$.

Thật vậy, giả sử $f(\alpha_{i_1}, \ldots, f(\alpha_{i_k})$ là một hệ con ĐLTT tối đại của hệ $\{f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_n)\}$ (do đó $\text{rank}\{f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_n)\} = k$), theo tính chất c., hệ véctơ $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_k}$ ĐLTT, do đó hệ con ĐLTT tối đại của hệ $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ có không ít hơn k véctơ, tức là $\text{rank}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \geq k$ $= \text{rank}\{f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_n)\}$.

3 Định lý cơ bản về sự xác định của ánh xạ tuyến tính

Định lý 3.1. *Cho V là không gian véctơ n chiều ($\dim V = n$), $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ (α) là cơ sở tùy ý của V, U là không gian véctơ tùy ý và $\beta_1, \ldots, \beta_n$ là hệ véctơ tùy ý của U. Khi đó tồn tại duy nhất một ánh xạ tuyến tính $f : V \to U$ thỏa mãn $f(\alpha_i) = \beta_i$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Chứng minh. **Tính duy nhất.** Giả sử có 2 ánh xạ tuyến tính $f, g : V \to U$ thỏa mãn điều kiện của định lý. Khi đó với mọi $x \in V \Rightarrow x = a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n$, ta có

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n) \\ &= a_1 f(\alpha_1) + \ldots + a_n f(\alpha_n) \\ &= a_1 g(\alpha_1) + \ldots + a_n g(\alpha_n) \\ &= g(a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n) \qquad = \quad g(x) \end{aligned}$$

Vậy $f = g$.

Sự tồn tại. Với mỗi $x \in V$, $x = a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n$, ta định nghĩa ánh xạ $f : V \to U$, như sau: $f(x) = a_1\beta_1 + \ldots + a_n\beta_n$. Rõ ràng f là ánh xạ tuyến tính thỏa mãn điều kiện của định lý. $\square$

Từ định lý này, ta thấy rằng một ánh xạ tuyến tính hoàn toàn được xác định khi biết ảnh của một cơ sở, và để cho một ánh xạ tuyến tính, ta chỉ cần cho ảnh của một cơ sở là đủ.

4 Ma trận của ánh xạ tuyến tính

4.1 Định nghĩa và ví dụ

Cho V và U là các không gian véctơ, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ (α) là cơ sở của V, $\beta_1, \ldots, \beta_m$ (β) là cơ sở của U. Vì $f(\alpha_i) \in U$ nên $f(\alpha_i)$ biểu thị tuyến tính được qua cơ sở (β) nên ta có:

$$\begin{array}{ccl} f(\alpha_1) & = & a_{11}\beta_1 + a_{12}\beta_2 + \ldots + a_{1m}\beta_m \\ f(\alpha_2) & = & a_{21}\beta_1 + a_{22}\beta_2 + \ldots + a_{2m}\beta_m \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f(\alpha_n) & = & a_{n1}\beta_1 + a_{n2}\beta_2 + \ldots + a_{nm}\beta_m \end{array}$$

Ma trận

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a22 & \ldots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

gọi là ma trận của f trong cặp cơ sở (α), (β) và kí hiệu là $\mathbf{A}_{f/_{(\alpha),(\beta)}}$

Trường hợp đặc biệt, khi f là phép biến đổi tuyến tính của V, $f : V \to V$ và $(\beta) \equiv (\alpha)$ thì ma trận của f trong cặp cơ sở $(\alpha), (\alpha)$ được gọi là ma trận của f trong cơ sở (α) và kí hiệu là $\mathbf{A}_{f/_{(\alpha)}}$

Ví dụ 1. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, x_1 - x_2, -x_2)$$

Tìm ma trận của f trong cặp cơ sở $(\alpha), (\beta)$ (ma trận $\mathbf{A}_{f/_{(\alpha),(\beta)}}$) với các cơ sở $(\alpha), (\beta)$ như sau:

$$\begin{array}{ccl} (\alpha) & : & \alpha_1 = (1,1),\ \alpha_2 = (1,0), \\ (\beta) & : & \beta_1 = (1,1,1),\ \beta_2 = (-1,2,1),\ \beta_3 = (1,3,2) \end{array}$$

Giải. Giả sử

$$f(\alpha_1) = a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3 \quad (1)$$
$$f(\alpha_2) = b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + b_3\beta_3 \quad (2)$$

Khi đó, theo định nghĩa, ma trận của f trong cặp cơ sở $(\alpha), (\beta)$ là

$$\mathbf{A}_{f/_{(\alpha),(\beta)}} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix}$$

Ta cần giải các phương trình véctơ (1), (2) để tìm $a_1,\ a_2,\ a_3$ và $b_1,\ b_2,\ b_3$. Các phương trình (1), (2) tương đương với các hệ phương trình tuyến tính mà ma trận các hệ số mở rộng của chúng là ma trận sau:

$$\left[\begin{array}{rrr|r|r} 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r|r} 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -4 & -1 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r|r} 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -4 & -1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r|r} 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & -3 \end{array}\right]$$

Hệ 1): $a_3 = 6,\ a_2 = 1 - a_3 = -5,\ a_1 = 3 + a_2 - a_3 = -8$

Hệ 2): $b_3 = 3,\ b_2 = 1 - b_3 = -2,\ b_1 = 1 + b_2 - b_3 = -4$

Vậy $\mathbf{A}_{f/(\alpha),(\beta)} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -4 \\ -5 & -2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$

□

Nhắc lại rằng cơ sở chính tắc của không gian $\mathbb{R}^n$ (ký hiệu (ϵ^n)) là cơ sở:

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0),\ e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1) \quad (\epsilon^n)$$

Bạn đọc có thể dễ dàng kiểm tra ví dụ sau:

Ví dụ 2. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ được cho bởi công thức (xem bài tập 1)

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n, a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n, \ldots, a_{m1}x_1 + \ldots + amnx_n)$$

Khi đó, ma trận của f trong cặp cơ sở $(\epsilon^n),\ (\epsilon^m)$ là:

$$\mathbf{A}_{f/\epsilon^n,\epsilon^m} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Chẳng hạn, ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ trong ví dụ 1 có ma trận trong cặp cơ sở $(\epsilon^2), (\epsilon^3)$ là

$$\mathbf{A}_{f/\epsilon^2,\epsilon^3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

4.2 Biểu thức tọa độ của ánh xạ tuyến tính

Cho $U,\ V$ là các KGVT, và $\alpha_1, \ldots, \alpha_n\ (\alpha),\ \beta_1, \ldots, \beta_m\ (\beta)$ lần lượt là các cơ sở của V và U. Cho $f : V \to U$ là ánh xạ tuyến tính. $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{f/(\alpha),(\beta)}$ là ma trận của f trong cặp cơ sở $(\alpha), (\beta)$. Với mọi véctơ $x \in V$, giả sử:

$$x/_{(\alpha)} = (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ f(x)/_{(\beta)} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$$

Khi đó, ta có công thức sau gọi là biểu thức tọa độ của ánh xạ tuyến tính f:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \mathbf{A}. \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Nếu ta ký hiệu $[x]/_{(\alpha)}$ là tọa độ của véctơ x trong cơ sở (α) viết theo cột, thì công thức trên có thể viết lại ngắn gọn như sau:

$$[f(x)]/_{(\beta)} = \mathbf{A}_{f/_{(\alpha),(\beta)}}.[x]/_{(\alpha)}$$

Trường hợp đặc biệt, khi $f : V \to V$ là phép biến đổi tuyến tính, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ (α) là cơ sở của V, ta có:

$$[f(x)]/_{(\alpha)} = \mathbf{A}_{f/_{(\alpha)}}.[x]/_{(\alpha)}$$

4.3 Ma trận của ánh xạ tuyến tính trong hai cặp cơ sở khác nhau

Cho V, U là các KGVT, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ (α) và $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n$ (α') là các cơ sở của V, $\beta_1, \ldots, \beta_m$ (β) và $\beta'_1, \ldots, \beta'_m$ (β') là các cơ sở của U. Cho ánh xạ tuyến tính $f : V \to U$. Khi đó, ta có công thức dưới đây cho thấy sự liên hệ giữa ma trận của f trong cặp cơ sở $(\alpha'), (\beta')$ với ma trận của f trong cặp cơ sở $(\alpha), (\beta)$:

$$\mathbf{A}_{f/_{(\alpha'),(\beta')}} = T^{-1}_{\beta\beta'}.\mathbf{A}_{f/_{(\alpha),(\beta)}}.T_{\alpha\alpha'}$$

trong đó, $T_{\alpha\alpha'}$ là ký hiệu ma trận đổi cơ sở từ cơ sở (α) sang cơ sở (α').

Trường hợp đặc biệt, khi $f : V \to V$ là phép biến đổi tuyến tính và $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ (α) và $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n$ (α') là hai cơ sở của V, ta có:

$$\mathbf{A}_{f/_{(\alpha')}} = T^{-1}_{\alpha\alpha'}.\mathbf{A}_{f/_{(\alpha)}}.T_{\alpha\alpha'}$$

5 Hạt nhân và ảnh

5.1 Các khái niệm cơ bản

Cho V, U là các không gian véctơ, $f : V \to U$ là ánh xạ tuyến tính.

- Ký hiệu: $\mathrm{Ker}f = \{x \in V | f(x) = 0\} \subset V$
  Khi đó, dựa vào tiêu chuẩn KGVT con, ta có thể chứng minh được $\mathrm{Ker}f$ là KGVT con của V, gọi là hạt nhân của ánh xạ tuyến tính f.
- Ký hiệu $\mathrm{Im}f = \{f(x) | x \in V\} \subset U$
  $\mathrm{Im}f$ cũng là một KGVT con của U, gọi là ảnh của ánh xạ tuyến tính f.

5.2 Nhận xét

- Để xác định hạt nhân của ánh xạ tuyến tính $f : V \to U$, ta sử dụng biểu thức tọa độ của f (xem mục 2), cụ thể:
  Chọn cơ sở $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ (α) và $\beta_1, \ldots, \beta_m$ (β) của V và U. Khi đó, ta có:

  $$[f(x)/_{(\beta)} = \mathbf{A}_{f/_{(\alpha),(\beta)}}.[x]/_{(\alpha)}$$

do đó:

$$\begin{aligned} x \in \text{Ker}f &\iff f(x) = 0 \\ &\iff [f(x)]/_{(\beta)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\iff \mathbf{A}.[x]/_{(\alpha)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (*) \end{aligned}$$

Như vậy, $x \in \text{Ker}f$ khi và chỉ khi tọa độ của x trong cơ sở (α) $\left([x]/_{(\alpha)}\right)$ là nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $(*)$ (với $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{f/_{(\alpha),(\beta)}}$.)

Từ đó, để tìm cơ sở của hạt nhân Ker$f$, ta làm như sau: Tìm ma trận của f trong cặp cơ sở $(\alpha), (\beta)$ nào đó, $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{f/_{(\alpha),(\beta)}}$. Giải hệ phương trình $\mathbf{A}.\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ $(*)$, tìm hệ nghiệm của hệ $(*)$. Tập tất cả các véctơ thuộc V sao cho tọa độ của véctơ đó trong cơ sở (α) là nghiệm cơ bản của hệ $(*)$ sẽ làm thành một cơ sở của Ker$f$. Trường hợp đặc biệt, nếu $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ là ánh xạ tuyến tính và $\mathbf{A}$ là ma trận của f trong cặp cơ sở chính tắc $(\mathbf{A} = \mathbf{A}_{f/_{(\epsilon^n),(\epsilon^m)}})$ thì hạt nhân của f chính là không gian con các nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $\mathbf{A}.\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ và cơ sở của Ker$f$ chính là hệ nghiệm cơ bản của hệ trên.

Bạn đọc sẽ thấy rõ cách tìm Ker$f$ qua phần bài tập.

- Để tìm ảnh của ánh xạ tuyến tính $f : V \to U$ ta dựa vào nhận xét sau:
  Nếu $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ là hệ sinh của V thì $f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_n)$ là hệ sinh của Imf. Thật vậy, với mọi $y \in \text{Im}f$, tồn tại $x \in V$ để $y = f(x)$. Vì $x \in V$ nên tồn tại $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ để $x = a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n$. Khi đó

  $$y = f(x) = f(a_1\alpha_1 + \ldots + a_n) = a_1 f(\alpha_1) + \ldots + a_n f(\alpha)$$

  Vậy, $f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_n)$ là hệ sinh của Imf.

  Như vậy, để tìm cơ sở của Imf, ta tìm cơ sở $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ của V, theo nhận xét trên, Im$f = \langle f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha) \rangle$, do đó hệ con ĐLTT tối đại của hệ $f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_n)$ là cơ sở của Imf

5.3 Mối liên hệ giữa số chiều của hạt nhân và ảnh

Định lý 5.1. *Cho ánh xạ tuyến tính $f : V \to U$. Khi đó, ta có:* $\dim \text{Ker}\, f + \dim \text{Im}\, f = \dim V$

Chứng minh. Giả sử $\dim V = n$, $\dim \text{Ker} f = k$ $(k \leq n)$ và giả sử $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ là cơ sở của Ker$f$. Vì $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ là hệ véctơ ĐLTT của V nên ta có thể bổ sung thêm $n - k$ véctơ để được hệ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n$ là cơ sở của V. Ta chứng minh $f(\alpha_{k+1}), \ldots, f(\alpha_n)$ là cơ sở của Imf.

Thật vậy, với mọi $y \in \mathrm{Im} f$, tồn tại $x \in V$ để $f(x) = y$, vì $x \in V$ nên $x = a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k + a_{k+1}\alpha_{k+1} + \ldots + a_n\alpha_n$. Do đó,

$$y = f(x) = a_1 f(\alpha_1) + \ldots + a_k f(\alpha_k) + a_{k+1} f(\alpha_{k+1}) + \ldots + a_n f(\alpha_n) = a_{k+1} f(\alpha_{k+1}) + \ldots + a_n f(\alpha_n)$$

vì $f(\alpha_1) = \ldots = f(\alpha_k) = 0$. Điều này chứng tỏ $f(\alpha_{k+1}), \ldots, f(\alpha_n)$ là hệ sinh của $\mathrm{Im} f$.

Bây giờ, giả sử

$$\begin{aligned} & a_{k+1} f(\alpha_{k+1}) + \ldots + a_n f(\alpha_n) = 0 \\ \Rightarrow\ & f(a_{k+1}\alpha_{k+1} + \ldots + a_n\alpha_n) = 0 \\ \Rightarrow\ & a_{k+1}\alpha_{k+1} + \ldots + a_n\alpha_n \in \mathrm{Ker} f \\ \Rightarrow\ & a_{k+1}\alpha_{k+1} + \ldots + a_n\alpha_n = a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k \end{aligned}$$

(vì $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ là cơ sở của $\mathrm{Ker} f$). Do đó $-a_1\alpha_1 - \ldots - a_k\alpha_k + a_{k+1}\alpha_{k+1} + \ldots + a_n\alpha_n = 0$ suy ra $a_i = 0$ với mọi i.

Vậy $f(\alpha_{k+1}), \ldots, f(\alpha_n)$ là cơ sở ĐLTT do đó là cơ sở của $\mathrm{Im}\, f$ nên $\dim \mathrm{Im}\, f = n - k$. Ta có $\dim \mathrm{Ker}\, f + \dim \mathrm{Im}\, f = k + (n - k) = n = \dim V$. $\square$

Số chiều của $\mathrm{Im}\, f$ còn được gọi là hạng của ánh xạ tuyến tính f, ký hiệu là $\mathrm{rank}\, f$. Số chiều của $\mathrm{Ker}\, f$ còn được gọi là số khuyết của ánh xạ tuyến tính f, ký hiệu là $\mathrm{def}(f)$. Như vậy, ta có: $\mathrm{rank}(f) = \dim \mathrm{Im}\, f$, $\mathrm{def}(f) = \dim \mathrm{Ker}\, f$ và $\mathrm{rank}(f) + \mathrm{def}(f) = \dim V$

6 Đơn cấu, toàn cấu, đẳng cấu

6.1 Các khái niệm cơ bản

Cho U, V là các KGVT, và $f : V \to U$ là ánh xạ tuyến tính. Khi đó:

- f gọi là đơn cấu nếu f là đơn ánh.
- f gọi là toàn cấu nếu f là toàn ánh.
- f gọi là đẳng cấu nếu f là song ánh.

Từ định nghĩa, ta có ngay tích của các đơn cấu, toàn cấu, đẳng cấu lại là các đơn cấu, toàn cấu, đẳng cấu. Nếu $f : V \to U$ là một đẳng cấu thì f có ánh xạ ngược $f^{-1} : U \to V$ cũng là một đẳng cấu.

Hai không gian véctơ U, V gọi là đẳng cấu nếu tồn tại một đẳng cấu $f : V \to U$. Dễ thấy rằng quan hệ đẳng cấu là quan hệ tương đương.

6.2 Các định lý về đơn cấu, toàn cấu, đẳng cấu

Định lý 6.1. *Hai không gian véctơ V, U đẳng cấu với nhau khi và chỉ khi* $\dim V = \dim U$

Định lý 6.2. *Cho V, U là các không gian véctơ,* $\dim V = \dim U$ *và $f : V \to U$ là ánh xạ tuyến tính. Khi đó, các khẳng định sau là tương đương:*

(i) f là đơn cấu

(ii) f là toàn cấu

(iii) f là đẳng cấu

Định lý 6.3. *Cho ánh xạ tuyến tính $f : V \to U$. Khi đó:*

(i) f là đơn cấu khi và chỉ khi $\operatorname{Ker} f = \{0\}$, *khi và chỉ khi* $\dim \operatorname{Im} f = \dim V$

(ii) f là toàn cấu khi và chỉ khi $\operatorname{Im} f = U$, *khi và chỉ khi* $\dim \operatorname{Im} f = \dim U$.

Nếu $f : V \to U$ là ánh xạ tuyến tính thì $\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rank} f = \operatorname{rank} \mathbf{A}$, trong đó A là ma trận của f trong cặp cơ sở (α), (β) bất kỳ. Do đó, để kiểm tra xem f có là đơn cấu, toàn cấu hay không, ta tìm ma trận của f trong cặp cơ sở (α), (β) nào đó rồi tìm $\operatorname{rank} \mathrm{A}$. Nếu $\operatorname{rank} \mathrm{A} = \dim V$ thì f là đơn cấu, còn nếu $\operatorname{rank} \mathrm{A} = \dim U$ thì f là toàn cấu.

6.3 Sự đẳng cấu của không gian các ánh xạ tuyến tính và không gian các ma trận

Ký hiệu $\operatorname{Hom}(V, U)$ là tập các ánh xạ tuyến tính $f : V \to U$. Trong $\operatorname{Hom}(V, U)$ ta định nghĩa hai phép toán như sau:

- Phép cộng: $\forall f, g \in \operatorname{Hom}(V, U), \quad \begin{array}{rccl} f+g & : & V & \longrightarrow & U \\ & & x & \longmapsto & (f+g)(x) = f(x) + g(x) \end{array}$

- Phép nhân: $\forall a \in \mathbb{R}, f \in \operatorname{Hom}(V, U), \quad \begin{array}{rccl} (af) & : & V & \longrightarrow & U \\ & & x & \longmapsto & (af)(x) = af(x) \end{array}$

khi đó $\operatorname{Hom}(V, U)$ cùng với 2 phép toán trên làm thành một KGVT, gọi là không gian các ánh xạ tuyến tính từ V đến U.

Điều thú vị là không gian $\operatorname{Hom}(V, U)$ đẳng cấu với không gian các ma trận nhờ đẳng cấu trong định lý sau:

Định lý 6.4. *Cho V, U là các KGVT,* $\dim V = n, \dim U = m$ *và cho* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ (α), $\beta_1, \ldots, \beta_m$ (β) *lần lượt là các cơ sở của V và U. Khi đó, ánh xạ:*

$$\begin{array}{rccl} \theta & : & \operatorname{Hom}(V, U) & \longrightarrow & M_{m,n}(\mathbb{R}) \\ & & f & \longmapsto & \theta(f) = \mathbf{A}_{f/_{(\alpha),(\beta)}} \end{array}$$

là một đẳng cấu.

Nhờ đẳng cấu này, việc nghiên cứu các ánh xạ tuyến tính dẫn đến việc nghiên cứu các ma trận và ngược lại. Bạn đọc sẽ thấy rõ phần này qua phần bài tập. [1]

[1]Đánh máy: LÂM HỮU PHƯỚC, Ngày: 22/02/2006