ĐẠI SỐ CƠ BẢN
(ÔN THI THẠC SĨ TOÁN HỌC)
Bài 17. Giải bài tập về ánh xạ tuyến tính

PGS TS Mỵ Vinh Quang

Ngày 10 tháng 3 năm 2006

1. **a.** Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, chứng minh rằng f là ánh xạ tuyến tính khi và chỉ khi tồn tại các số $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ để $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$

   b. Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Chứng minh rằng f là ánh xạ tuyến tính khi và chỉ khi tồn tại các số $a_{ij} \in \mathbb{R}$ để

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \ldots, a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n) \qquad (*)$$

   Giải. Ta chỉ giải câu b., câu a. là trường hợp đặc biệt của câu b. khi $m = 1$.
   Kiểm tra trực tiếp, ta thấy ngay rằng nếu f có dạng như $(*)$ thì f là ánh xạ tuyến tính.
   Ngược lại, nếu f là ánh xạ tuyến tính, ta đặt:

$$f(e_i) = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{mi})$$

   với $i = 1, 2, \ldots, n$, trong đó $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= f(x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n) \\ &= x_1f(e_1) + x_2f(e_2) + \ldots + x_nf(e_n) \\ &= f(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \ldots, a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n) \end{aligned}$$

$\square$

2. Tìm công thức của ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ biết

   a. $f(1, 1, 2) = (1, 0, 0),\ f(2, 1, 1) = (0, 1, 1),\ f(2, 2, 3) = (0, -1, 0)$.

   b. $f(1, 2, 3) = (-1, 0, 1),\ f(-1, 1, 1) = (0, 1, 0),\ f(1, 3, 4) = (1, 0, 2)$.

   Giải. **a.** Giả sử

$$(x_1, x_2, x_3) = a_1(1, 1, 2) + a_2(2, 1, 1) + a_3(2, 2, 3) \qquad (1)$$

   Khi đó

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_1(1, 0, 0) + a_2(0, 1, 1) + a_3(0, -1, 0) = (a_1, a_2 - a_3, a_2) \qquad (2)$$

   Do đó, để tính $f(x_1, x_2, x_3)$, ta cần tính a_1, a_2, a_3 qua x_1, x_2, x_3. Do công thức (1), a_1, a_2, a_3 là nghiệm của hệ:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & x_1 \\ 1 & 1 & 2 & x_2 \\ 2 & 1 & 3 & x_3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|l} 1 & 2 & 2 & x_1 \\ 0 & -1 & 0 & -x_1 + x_2 \\ 0 & -3 & -1 & -2x_1 + x_3 \end{array}\right]$$
$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|l} 1 & 2 & 2 & x_1 \\ 0 & -1 & 0 & -x_1 + x_2 \\ 0 & 0 & -1 & x_1 - 3x_2 + x_3 \end{array}\right]$$

Vậy:

$$\begin{aligned}
&a_3 = -x_1 + 3x_2 - x_3 \\
&a_2 = x_1 - x_2 \\
&a_1 = x_1 - 2a_2 - 2a_3 = x_1 - 2(x_1 - x_2) - 2(-x_1 + 3x_2 - x_3) = x_1 - 4x_2 + 2x_3
\end{aligned}$$

Thay vào (2), công thức của ánh xạ f là:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 4x_2 + 2x_3, 2x_1 - 4x_2 + x_3, x_1 - x_2)$$

b. Giải tương tự câu a., chi tiết xin dành cho bạn đọc.

□

3. Trong $\mathbb{R}^3$ cho 2 cơ sở:

$$\begin{array}{ll}
u_1 = (1,0,0),\ u_2 = (0,1,1),\ u_3 = (1,0,1) & (u) \\
v_1 = (1,-1,0),\ v_2 = (0,1,-1),\ v_3 = (1,0,1) & (v)
\end{array}$$

và cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f(u_i) = v_i$.

a. Tìm công thức của f.

b. Tìm các ma trận

$$\mathbf{A}_{f/_{(u)}}\ ,\quad \mathbf{A}_{f/_{(u),(v)}}\ ,\quad \mathbf{A}_{f/_{(v)}}\ ,\quad \mathbf{A}_{f/_{(v),(u)}}\ ,\quad \mathbf{A}_{f/_{(\varepsilon^3)}}$$

Giải. **a.** Giả sử

$$(x_1, x_2, x_3) = a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 \qquad (1)$$

Khi đó

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3) &= f(a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3) \\
&= a_1f(u_1) + a_2f(u_2) + a_3f(u_3) \\
&= a_1(1,-1,0) + a_2(0,1,-1) + a_3(1,0,1) \\
&= (a_1 + a_3, -a_1 + a_2, -a_2 + a_3)
\end{aligned}$$

Vậy $f(x_1, x_2, x_3) = (a_1 + a_3, -a_1 + a_2, -a_2 + a_3)$ (2)

Ta cần tính $a_1,\ a_2,\ a_3$ theo $x_1,\ x_2,\ x_3$, do (1), $a_1,\ a_2,\ a_3$ là nghiệm của hệ

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & x_3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & -x_2 + x_3 \end{array}\right]$$

do đó: $a_3 = -x_2 + x_3,\ a_2 = x_2,\ a_1 = x_1 - a_3 = x_1 + x_2 - x_3$. Thay vào (2) công thức của f là:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, -x_1 + x_3, -2x_2 + x_3)$$

b. • Ma trận $\mathbf{A}_{f/_{(u)}}$

Ta có:

$$\begin{array}{ll}
f(u_1) = v_1 = a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 & (1) \\
f(u_2) = v_2 = b_1u_1 + b_2u_2 + b_3u_3 & (2) \\
f(u_3) = v_3 = c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3 & (3)
\end{array}$$

Khi đó

$$\mathbf{A}_{f/_{(u)}} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

các $a_i,\ b_i,\ c_i$ lần lượt là nghiệm của các phương trình véctơ (1), (2), (3). Mỗi phương trình (1), (2), (3) tương đương với một hệ phương trình tuyến tính có cùng ma trận các hệ số (chỉ khác nhau cột tự do), do đó, ta có thể giải cùng lúc 3 hệ đó như sau:

$$\left[\begin{array}{ccc|r|r|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|r|r|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

– Hệ 1: $a_3 = 1,\ a_2 = -1,\ a_1 = 1 - a_3 = 0$

– Hệ 2: $b_3 = -2,\ b_2 = 1,\ b_1 = -b_3 = 2$

– Hệ 3: $c_3 = 1,\ c_2 = 0,\ c_1 = 1 - c_3 = 0$

Vậy ma trận

$$\mathbf{A}_{f/_{(u)}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Ma trận $\mathbf{A}_{f/_{(u),(v)}}$

  Ta có

$$\begin{aligned} f(u_1) &= v_1 = 1v_1 + 0v_2 + 0v_3 \\ f(u_2) &= v_2 = 0v_1 + 1v_2 + 0v_3 \\ f(u_3) &= v_3 = 0v_1 + 0v_2 + 1v_3 \end{aligned}$$

  Vậy ma trận

$$\mathbf{A}_{f/_{(u),(v)}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Ma trận $\mathbf{A}_{f/_{(v)}}$

  Áp dụng câu a., ta sẽ tính được $f(v_1),\ f(v_2),\ f(v_3)$, sau đó làm như các phần trước. Cụ thể:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= (1, -1, 2) = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 \\ f(v_2) &= (0, -1, -3) = b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3 \\ f(v_3) &= (1, 0, 1) = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 \end{aligned}$$

  $a_i,\ b_i,\ c_i$ là nghiệm của 3 hệ sau:

$$\left[\begin{array}{rrc|r|r|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{crc|c|r|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right]$$
$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c|r|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -4 & 2 \end{array}\right]$$

– Hệ 1: $a_3 = 1,\ a_2 = -a_3 = -1,\ a_1 = 1 - a_3 = 0$

– Hệ 2: $b_3 = -2,\ b_2 = -1 - b_3 = 1,\ b_1 = -b_3 = 2$

– Hệ 3: $c_3 = 1,\ c_2 = 1 - c_3 = 0,\ c_1 = 1 - c_3 = 0$

Vậy

$$\mathbf{A}_{f/_{(v)}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Ma trận $\mathbf{A}_{f/_{(v),(u)}}$ làm tương tự.
- Ma trận $\mathbf{A}_{f/_{(\varepsilon^3)}}$
  theo câu a., công thức của f là

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, -x_1 + x_3, -2x_2 + x_3)$$

  do đó ta có ngay:

$$\mathbf{A}_{f/_{(\varepsilon^3)}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

□

4. Cho ánh xạ tuyến tính

$$\begin{array}{rcccl} \theta & : & \mathbb{R}_n[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[x] \\ & & p(x) & \longmapsto & p'(x) \end{array}$$

Tìm ma trận của θ trong cơ sở:

a. $u_o = 1,\ u_1 = x,\ u_2 = x^2, \ldots,\ u_n = x^n$

b. $v_o = 1,\ v_1 = x - a,\ v_2 = \frac{(x-a)^2}{2!}, \ldots,\ v_n = \frac{(x-a)^n}{n!}$

Giải. **a.** Ta có

$$\begin{array}{l} \theta(u_o) = 0 = 0u_o + 0u_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 0u_n \\ \theta(u_1) = 1 = 1u_o + 0u_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 0u_n \\ \theta(u_2) = 2x = 0u_o + 2u_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 0u_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \theta(u_k) = kx^{k-1} = 0u_o + 0u_1 + \ldots + ku_{k-1} + \ldots + 0u_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \theta(u_n) = nx^{n-1} = 0u_o + 0u_1 + \ldots\ldots\ldots + nu_{n-1} + 0u_n \end{array}$$

Vậy

$$\mathbf{A}_{f/_{(u)}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & k & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & n \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

b. Lời giải tương tự câu a., chi tiết xin dành cho bạn đọc.

□

5. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2 + x_3, 2x_1 + x_4, 2x_2 - x_3 + x_4)$$

Tìm cơ sở, số chiều của $\operatorname{Ker} f,\ \operatorname{Im} f$

Giải. • $(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow f(x_1,x_2,x_3,x_4)=0, \Leftrightarrow (x_1,x_2,x_3,x_4)$ là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_4 &= 0 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Do đó, $\operatorname{Ker} f$ chính là không gian con các nghiệm của hệ (1) và hệ nghiệm cơ bản của hệ (1) chính là một cơ sở của $\operatorname{Ker} f$. Để giải hệ (1), ta biến đổi ma trận hệ số mở rộng:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$
$$\longrightarrow \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Hệ có vô số nghiệm phụ thuộc 1 tham số là x_4. Ta có

$$\begin{aligned} &x_3 = 0 \\ &x_2 = \tfrac{1}{2}(2x_3 - x_4) = -\tfrac{1}{2}x_4 \\ &x_1 = x_2 - x_3 = x_2 = -\tfrac{1}{2}x_4 \end{aligned}$$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ là:

$$\begin{cases} x_1 = -a \\ x_2 = -a \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 2a \end{cases}$$

hệ nghiệm cơ bản $\alpha_1 = (-1,-1,0,2)$, do đó, $\dim \operatorname{Ker} f = 1$, cơ sở của $\operatorname{Ker} f$ là $\alpha_1 = (-1,-1,0,2)$.

• Để tìm cơ sở của $\operatorname{Im} f$, ta tìm ảnh của cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^4$. Ta có:

$$f(e_1) = (1,2,0),\ f(e_2) = (-1,0,2),$$
$$f(e_3) = (1,0,-1),\ f(e_4) = (0,1,1)$$

$$\operatorname{Im} f = \langle f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)\rangle$$

Hệ con ĐLTT tối đại của $f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)$ là một cơ sở của $\operatorname{Im} f$. Ta có

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{rrr} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \end{array}\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}$$
$$\longrightarrow \left[\begin{array}{rrr} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{array}\right]\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}$$
$$\longrightarrow \left[\begin{array}{rrr} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}$$

Vậy cơ sở của $\operatorname{Im} f$ là $f(e_1), f(e_4), f(e_3)$ và $\dim f = 3$.

$\square$

6. Tìm vectơ riêng, giá trị riêng, chéo hóa các ma trận sau:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

Giải. b) Tìm đa thức đặc trưng:

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -2 \\ 1 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (5-\lambda)(2-\lambda)^2 + 2 + 2 - (2-\lambda) - 4(5-\lambda) - (2-\lambda) \\ &= -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 18\lambda \end{aligned}$$

$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0, \lambda = 3, \lambda = 6.$
Vậy A có 3 giá trị riêng là $\lambda = 0, \lambda = 3, \lambda = 6$.

- Vectơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda = 0$ là các vectơ nghiệm khác không của hệ:
$$\left[\begin{array}{rrr|r} 5 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & -2 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -11 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$
Hệ có vô số nghiệm phụ thuộc một tham số là x_3. Ta có: $x_3 = a$, $x_2 = a$, $x_1 = 0$.
Nghiệm của hệ là tất cả các vectơ dạng $(0, a, a)$, $a \in \mathbb{R}$. Do đó, vectơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda = 0$ là các vectơ có dạng $(0, a, a)$, $a \neq 0$, $\dim V_0 = 1$.
Cơ sở của V_0 là $\alpha_1 = (0, 1, 1)$.

- Vectơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda = 3$ là các vectơ nghiệm khác không của hệ:
$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right]$$
$$\longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$
Hệ có vô số nghiệm phụ thuộc một tham số là x_3.

Ta có: $x_3 = b$, $x_2 = -b$, $x_1 = 2x_2 + x_3 = -b$.

Nghiệm của hệ là tất cả các vectơ dạng $(-b, -b, b)$, $b \in \mathbb{R}$. Do đó, vectơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda = 3$ là các vectơ có dạng $(-b, -b, b)$, $b \neq 0$, $\dim V_3 = 1$.

Cơ sở của V_3 là $\alpha_2 = (-1, -1, 1)$.

- Vectơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda = 6$ là các vectơ nghiệm khác không của hệ:
$$\left[\begin{array}{rrr|r} -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -4 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$
Hệ có vô số nghiệm phụ thuộc một tham số là x_3.

  Ta có: $x_3 = c$, $x_2 = -c$, $x_1 = -x_2 + x_3 = 2c$.

  Nghiệm của hệ là tất cả các vectơ dạng $(2c, -c, c)$, $c \in \mathbb{R}$. Do đó, vectơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda = 6$ là các vectơ có dạng $(2c, -c, c)$, $c \neq 0$, $\dim V_6 = 1$.

  Cơ sở của V_0 là $\alpha_3 = (2, -1, 1)$.

Chéo hóa. Tổng hợp 3 trường hợp trên ta thấy ma trận A có 3 vectơ riêng độc lập tuyến tính. Do đó A chéo hóa được. Ma trận T cần tìm là:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

và

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

là ma trận chéo.

d) Tìm đa thức đặc trưng

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(1-\lambda)^2$$

$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0, \lambda = 1$.

Vậy ma trận A có 2 giá trị riêng là $\lambda = 0, \lambda = 1$.

- Vectơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda = 0$ là các vectơ nghiệm khác không của hệ:
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$
Hệ có vô số nghiệm phụ thuộc hai tham số là x_2, x_3.

  Ta có: $x_2 = a$, $x_3 = b$, $x_4 = 0$, $x_1 = 0$.

  Nghiệm của hệ là tất cả các vectơ dạng $(0, a, b, 0)$, $a, b \in \mathbb{R}$. Do đó, vectơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda = 0$ là các vectơ có dạng $(0, a, b, 0)$, $a^2 + b^2 \neq 0$, $\dim V_0 = 2$.

  Cơ sở của V_0 là $\alpha_1 = (0, 1, 0, 0)$, $\alpha_2 = (0, 0, 1, 0)$.

- Vectơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda = 1$ là các vectơ nghiệm khác không của hệ:
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$
Hệ có vô số nghiệm phụ thuộc tham số là x_4.
Ta có: $x_4 = c$, $x_3 = 0$, $x_2 = 0$, $x_1 = 0$.
Nghiệm của hệ là tất cả các vectơ dạng $(0, 0, 0, c)$, $c \in \mathbb{R}$. Do đó, vectơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda = 1$ là các vectơ có dạng $(0, 0, 0, c)$, $c \neq 0$, $\dim V_1 = 1$.
Cơ sở của V_1 là $\alpha_3 = (0, 0, 0, 1)$.

Chéo hóa. Tổng hợp 3 trường hợp trên ta thấy ma trận A chỉ có 3 vectơ riêng độc lập tuyến tính trong khi A là ma trận cấp 4 nên A không chéo hóa được. □

7. Trong $\mathbb{R}^3$ cho cơ sở:
$$u_1 = (1, 1, 1), \qquad u_2 = (-1, 2, 1), \qquad u_3 = (1, 3, 2)$$
và cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi:
$f(u_1) = (0, 5, 3)$
$f(u_2) = (2, 4, 3)$
$f(u_3) = (0, 3, 2)$
Tìm một cơ sở để ma trận của f trong cơ sở đó là ma trận chéo.

Giải. Đầu tiên ta tìm ma trận của f trong cơ sở nào đó của $\mathbb{R}^3$. Vì èề đã cho $f(u_1)$, $f(u_2)$, $f(u_3)$ nên dễ nhất là tìm ma trận của f trong cơ sở (u). Bạn đọc có thể dễ dàng tìm được:
$$A_{f/_{(u)}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
Bước tiếp theo, ta tìm giá trị riêng và vectơ riêng của ma trận $A = A_{f/_{(u)}}$. Từ đó sẽ tìm được giá trị riêng và vectơ riêng của f.

Các giá trị riêng, vectơ riêng của ma trận $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, ta đã tìm trong phần lý thuyết.

Kết quả tóm tắt như sau:

- A có hai giá trị riêng là $\lambda = -1$ và $\lambda = 2$.
- Các vectơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda = -1$ là các vectơ $(-a - b, a, b)$, $a^2 + b^2 \neq 0$. Trường hợp này A có hai vectơ riêng độc lập tuyến tính là $\alpha_1 = (-1, 1, 0)$, $\alpha_2 = (-1, 0, 1)$.
- Các vectơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda = 2$ là các vectơ $(c, c, 0)$, $c \neq 0$. Trường hợp này A có một vectơ riêng độc lập tuyến tính là $\alpha_3 = (1, 1, 1)$.

Từ đó suy ra:

- f có hai giá trị riêng là $\lambda = -1$ và $\lambda = 2$.
- Các vectơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda = -1$ là các vectơ dạng $(-a-b)u_1 + au_2 + bu_3 = (-2a, a + 2b, b)$, $a^2 + b^2 \neq 0$.
Trường hợp này f có hai vectơ riêng độc lập tuyến tính là:
$\beta_1 = -1.u_1 + 1.u_2 + 0.u_3 = (-2, 1, 0)$
$\beta_2 = -1.u_1 + 0.u_2 + 1.u_3 = (0, 2, 1)$

- Các vectơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda = 2$ là các vectơ dạng $c.u_1 + c.u_2 + c.u_3 = (c, 6c, 4c)$, $c \neq 0$.
  Trường hợp này f có một vectơ riêng độc lập tuyến tính là:
  $\beta_3 = 1.u_1 + 1.1.u_2 + 1.u_3 = (1, 6, 4)$

Kết luận. Vì f là phép biến đổi tuyến tính của $\mathbb{R}^3$ ($\dim \mathbb{R}^3 = 3$) và f có 3 vectơ riêng độc lập tuyến tính là β_1, β_2, β_3 nên β_1, β_2, β_3 (β) chính là cơ sở của $\mathbb{R}^3$ cần tìm và ta có:

$$A_{f/_{(\beta)}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

□

8. Cho phép biến đổi tuyến tính $\varphi : V \to V$ thỏa mãn $\varphi^2 = \varphi$. Chứng minh:
   (a) $\operatorname{Im} \varphi + \operatorname{Ker} \varphi = V$
   (b) $\operatorname{Im} \varphi \cap \operatorname{Ker} \varphi = \{0\}$

   Giải. a) Tất nhiên $\operatorname{Im} \varphi + \operatorname{Ker} \varphi \subset V$, ta cần chứng minh: $V \subset \operatorname{Im} \varphi + \operatorname{Ker} \varphi$.
   Với mọi $\alpha \in V$, ta có: $\alpha = \varphi(\alpha) + (\alpha - \varphi(\alpha))$
   Tất nhiên $\varphi(\alpha) \in \operatorname{Im} \varphi$, và $\varphi(\alpha - \varphi(\alpha)) = \varphi(\alpha) - \varphi^2(\alpha) = \varphi(\alpha) - \varphi(\alpha) = 0$. Do đó, $\alpha - \varphi(\alpha) \in \operatorname{Ker} \varphi \Rightarrow \alpha \in \operatorname{Im} \varphi + \operatorname{Ker} \varphi$, và $\operatorname{Im} \varphi + \operatorname{Ker} \varphi = V$.
   b) Giả sử $\beta \in \operatorname{Im} \varphi \cap \operatorname{Ker} \varphi$. Khi đó tồn tại $\alpha \in V$ để $\varphi(\alpha) = \beta$. Theo giả thiết $\varphi^2 = \varphi$ nên ta có: $\beta = \varphi(\alpha) = \varphi^2(\alpha) = \varphi(\varphi(\alpha)) = \varphi(\beta) = 0$ (vì $\beta \in \operatorname{Ker} \varphi$).
   Vậy $\beta \in \operatorname{Im} \varphi \cap \operatorname{Ker} \varphi$ thì $\beta = 0$. Do đó, $\operatorname{Im} \varphi \cap \operatorname{Ker} \varphi = \{0\}$. □

9. Cho $f : V \to V$ là ánh xạ tuyến tính, L là không gian vectơ con của V. Chứng minh:
   (a) $\dim L - \dim \operatorname{Ker} f \leq \dim f(L) \leq \dim L$.
   (b) $\dim L \leq \dim f^{-1}(L) \leq \dim L + \dim \operatorname{Ker} f$.

   Giải. Để giải bài tập 9 và bài tập 10, ta cần nhớ kết quả sau (đã chứng minh trong phần lý thuyết):
   Nếu $\varphi : V \to U$ là ánh xạ tuyến tính thì ta có:

   $$\dim \operatorname{Im} \varphi + \dim \operatorname{Ker} \varphi = \dim V$$

   a) Xét ánh xạ $\bar{f} : L \to V$, $\bar{f} = f|_L$, tức là $\bar{f}(\alpha) = f(\alpha)$ với mọi $\alpha \in L$.
   Ta có $\operatorname{Im} \bar{f} = \bar{f}(L) = f(L)$, $\operatorname{Ker} \bar{f} = L \cap \operatorname{Ker} f$.
   Áp dụng kết quả trên với $\varphi = \bar{f}$, ta có:

   $$\dim \operatorname{Im} \bar{f} + \dim \operatorname{Ker} \bar{f} = \dim L$$

   Do đó, $\dim f(L) = \dim \operatorname{Im} \bar{f} \leq \dim L$
   và $\dim f(L) = \dim L - \dim \operatorname{Ker} \bar{f} \geq \dim L - \dim \operatorname{Ker} f$

   b) Đặt $L' = f^{-1}(L)$. Khi đó $f(L') = L$.
   Áp dụng a) với không gian vectơ con L', ta có:

   $$\dim L' - \dim \operatorname{Ker} f \leq \dim f(L') \leq \dim L'$$

   tức là

   $$\dim f^{-1}(L) - \dim \operatorname{Ker} f \leq \dim L \leq \dim f^{-1}(L)$$

Do đó:
$$\dim L \le \dim f^{-1}(L) \le \dim L + \dim \operatorname{Ker} f$$

$\square$

10. Cho $\varphi : V \to W$, $\psi : W \to U$ là ánh xạ tuyến tính. Chứng minh:

(a) $\operatorname{rank}(\psi\varphi) \le \min\{\operatorname{rank}\psi, \operatorname{rank}\varphi\}$

(b) $\operatorname{rank}(\psi\varphi) = \operatorname{rank}\varphi - \dim(\operatorname{Ker}\psi \cap \operatorname{Im}\varphi)$

(c) $\operatorname{rank}(\psi\varphi) \ge \operatorname{rank} k\varphi + \operatorname{rank} - \dim W$

Giải. a) Áp dụng câu a) bài 9 cho ánh xạ tuyến tính $\psi : W \to U$ với $L = \operatorname{Im}\varphi = \varphi(V) \subset W$, ta có:
$$\dim \varphi(V) \ge \dim \psi(\varphi(V)) = \dim(\psi\varphi)(V) = \dim \operatorname{Im}(\psi\varphi)$$
Vậy ta có: $\operatorname{rank}(\psi\varphi) \le \operatorname{rank}\varphi \quad (1)$
Mặt khác, ta có: $\varphi(V) \subset W$ nên $\psi(\varphi(V)) \subset \psi(W)$, do đó $\dim \psi\varphi(V) \le \dim \psi(W)$, tức là: $\operatorname{rank}\psi\varphi \le \operatorname{rank}\psi \qquad (2)$.
Từ (1) và (2) ta có điều cần chứng minh.

b) Xét ánh xạ $\bar{\psi} : \operatorname{Im}\varphi \to U$, $\bar{\psi} = \psi|_{\operatorname{Im}\varphi}$, tức là $\bar{\psi}(\alpha) = \psi(\alpha)$ với mọi $\alpha \in \operatorname{Im}\varphi$.
Khi đó, $\operatorname{Ker}\bar{\psi} = \operatorname{Ker}\psi \cap \operatorname{Im}\varphi$ và $\operatorname{Im}\bar{\psi} = \bar{\psi}(\operatorname{Im}\varphi) = \psi(\operatorname{Im}\varphi) = (\psi\varphi)(V) = \operatorname{Im}\psi\varphi$, tức là: $\dim \operatorname{Im}(\psi\varphi) + \dim(\operatorname{Ker}\psi \cap \operatorname{Im}\varphi) = \dim \operatorname{Im}\varphi$.
Do vậy, $\operatorname{rank}(\psi\varphi) = \operatorname{rank}\varphi - \dim(\operatorname{Ker}\psi \cap \operatorname{Im}\varphi)$.

c) Ta có: $\dim \operatorname{Ker}\psi + \dim \operatorname{Im}\psi = \dim W$ nên $\dim \operatorname{Ker}\psi = \dim W - \operatorname{rank}\psi$.
Bởi vậy, theo câu b)

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}(\psi\varphi) &= \operatorname{rank}\varphi - \dim(\operatorname{Ker}\psi \cap \operatorname{Im}\varphi)\\ &\ge \operatorname{rank}\varphi - \dim \operatorname{Ker}\psi = \operatorname{rank}\varphi - (\dim W - \operatorname{rank}\psi) = \operatorname{rank}\varphi + \operatorname{rank}\psi - \dim W.\end{aligned}$$

$\square$

1

[1]Đánh máy: LÂM HỮU PHƯỚC, TRẦN ĐỨC THUẬN Ngày: 09/03/2006