ĐẠI SỐ CƠ BẢN
(ÔN THI THẠC SĨ TOÁN HỌC)
Bài 19. Bài tập về không gian véctơ Euclide

PGS TS Mỵ Vinh Quang

Ngày 10 tháng 3 năm 2006

1. Tìm một cơ sở trực giao, cơ sở trực chuẩn của không gian véctơ con L của $\mathbb{R}^4$ trong các trường hợp sau:

   a. $L = \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$ với $\alpha_1 = (1,1,0,0),\ \alpha_2 = (1,1,1,1),\ \alpha_3 = (0,-1,0,1)$

   b. $L = \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$ với $\alpha_1 = (1,2,2,-1),\ \alpha_2 = (1,1,-5,3),\ \alpha_3 = (3,2,8,-7)$.

   c. $L = \left\{ (x_1,x_2,x_3,x_4) \middle| \begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 &= 0 \\ x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \end{cases} \right\}$

Giải. **a.** Dễ thấy $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$ ĐLTT nên $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$ là cơ sở của L. Để tìm cơ sở trực giao của L ta chỉ cần trực giao hóa hệ véctơ $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$. Ta có:

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \alpha_1 \\
\beta_2 &= \alpha_2 - \frac{\langle \alpha_2, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle}\beta_1 = (1,1,1,1) - \frac{2}{2}(1,1,0,0) = (0,0,1,1) \\
\beta_3 &= \alpha_3 - \frac{\langle \alpha_3, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle}\beta_1 - \frac{\langle \alpha_3, \beta_2 \rangle}{\langle \beta_2, \beta_2 \rangle}\beta_2 \\
&= (0,-1,0,1) - \frac{-1}{2}(1,1,0,0) - \frac{1}{2}(0,0,1,1) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})
\end{aligned}$$

Ta có thể chọn $\beta_3 = (1,-1,-1,1)$. Vậy, cơ sở trực giao của L là:

$$\beta_1 = (1,1,0,0),\ \beta_2 = (0,0,1,1),\ \beta_3 = (1,-1,-1,1)$$

Trực chuẩn hóa cơ sở trực giao trên, ta được cơ sở trực chuẩn của L là:

$$e_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0),\ e_2 = (0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}),\ e_3 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

b. Giải tương tự câu **a.**, chi tiết dành cho bạn đọc.

c. Đầu tiên, ta tìm một cơ sở của L. L là không gian nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 &= 0 \\ x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \end{cases} \qquad (1)$$

do đó cơ sở của L là hệ nghiệm cơ bản của hệ (1). Hệ (1) có vô số nghiệm phụ thuộc 2 tham số $x_3,\ x_4$. Ta có:

$$\begin{aligned}
x_2 &= x_3 + x_4 \\
x_1 &= x_2 - x_4 = x_3
\end{aligned}$$

do đó, hệ nghiệm cơ bản của hệ (1) là:

$$\alpha_1 = (1, 1, 1, 0);\ \alpha_2 = (0, 1, 0, 1)$$

Do đó, cơ sở của L là $\alpha_1,\ \alpha_2$. Trực giao hóa hệ véctơ $\alpha_1,\ \alpha_2$, ta sẽ được cơ sở trực giao của L.Ta có:

$$\begin{aligned}
&\beta_1 = \alpha_1 \\
&\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\langle \alpha_2, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle}\beta_1 = (0, 1, 0, 1) - \frac{1}{3}(1, 1, 1, 0) = (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1)
\end{aligned}$$

Ta có thể chọn $\beta_2 = (-1, 2, -1, 3)$ và cơ sở trực giao của L là:

$$\beta_1 = (1, 1, 1, 0),\ \beta_2 = (-1, 2, -1, 3)$$

Trực chuẩn hóa cơ sở trực giao $\beta_1,\ \beta_2$ ta được cơ sở trực chuẩn của L là:

$$e_1 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0),\ e_2 = (-\frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{2}{\sqrt{15}}, -\frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{3}{\sqrt{15}})$$

$\square$

2. Chứng minh các hệ véctơ sau là hệ trực giao trong $\mathbb{R}^4$. Hãy bổ sung chúng để được một cơ sở trực giao của $\mathbb{R}^4$

   a. $\alpha_1 = (1, 1, 1, 1),\ \alpha_2 = (1, 0, -1, 0)$

   b. $\alpha_1 = (0, 0, 1, 1),\ \alpha_2 = (1, 1, 1 - 1)$

   Giải. **a.** Vì $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = 0$ nên $\alpha_1 \perp \alpha_2$. Để bổ sung được một cơ sở trực giao của $\mathbb{R}^4$, đầu tiên ta phải bổ sung thêm 2 véctơ $\alpha_3,\ \alpha_4$ của $\mathbb{R}^4$ để được một cơ sở của $\mathbb{R}^4$, sau đó ta trực giao hóa cơ sở đó, ta sẽ được cơ sở trực giao của $\mathbb{R}^4$, chứa các véctơ $\alpha_1,\ \alpha_2$.
   Có nhiều cách chọn các véctơ $\alpha_3,\ \alpha_4$ để $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4$ là cơ sở của $\mathbb{R}^4$ (chọn để định thức cấp 4 tương ứng là khác 0). Ví dụ ta có thể chọn $\alpha_3 = (0, 0, 1, 0),\ \alpha_4 = (0, 0, 0, 1)$. Khi đó định thức cấp 4 tương ứng của hệ $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4$ bằng 1, nên hệ $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4$ ĐLTT nên là cơ sở của $\mathbb{R}^4$. Trực giao hóa hệ véctơ $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4$.

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \alpha_1 \\
\beta_2 &= \alpha_2 - \frac{\langle \alpha_2, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle}\beta_1 \\
&= \alpha_2 - 0.\beta_1 = \alpha_2 \\
\beta_3 &= \alpha_3 - \frac{\langle \alpha_3, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle}\beta_1 - \frac{\langle \alpha_3, \beta_2 \rangle}{\langle \beta_2, \beta_2 \rangle}\beta_2 \\
&= (0, 0, 1, 0) - \frac{1}{4}(1, 1, 1, 1) - \frac{-1}{2}(1, 0, -1, 0) = (\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4})
\end{aligned}$$

Ta có thể chọn $\beta_3 = (1, -1, 1, -1)$

$$\begin{aligned}
\beta_4 &= \alpha_4 - \frac{\langle \alpha_4, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1}\beta_1 - \frac{\langle \alpha_4, \beta_2 \rangle}{\langle \beta_2, \beta_2 \rangle}\beta_2 - \frac{\langle \alpha_4, \beta_3 \rangle}{\langle \beta_3, \beta_3 \rangle}\beta_3 \\
&= (0, 0, 0, 1) - \frac{1}{4}(1, 1, 1, 1) - \frac{0}{2}(1, 0, -1, 0) - \frac{-1}{4}(1, -1, 1, -1) \\
&= (0, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})
\end{aligned}$$

Ta có thể chọn $\beta_4 = (0, -1, 0, 1)$

Vậy ta có thể bổ sung thêm 2 véctơ

$$\beta_3 = (1, -1, 1, -1),\ \beta_4 = (0, -1, 0, 1)$$

để được $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \beta_3,\ \beta_4$ là cơ sở trực giao của $\mathbb{R}^4$.

b. Giải tương tự câu **a.**, chi tiết xin dành cho bạn đọc.

$\square$

3. Hãy tìm hình chiếu trực giao và khoảng cách của véctơ x lên không gian con L của $\mathbb{R}^4$ với:

a. $x = (1, -1, 1, 0),\ L = \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$, trong đó

$$\alpha_1 = (1, 1, 0, 0),\ \alpha_2 = (1, 1, 1, 1),\ \alpha_3 = (0, -1, 0, 1)$$

b. $x = (1, 0, 1, 2),\ L = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \,\middle|\, \begin{array}{rcl} x_1 - x_2 + x_4 &=& 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 &=& 0 \end{array} \right\}$

Giải. **a. Cách 1.** Đầu tiên ta một tìm cơ sở trực chuẩn của L. Theo bài 1, cơ sở trực chuẩn của L là

$$e_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0),\ e_2 = (0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}),\ e_3 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

Do đó, hình chiếu trực giao x' của x lên L là

$$\begin{array}{rcl} x' &=& \langle x, e_1 \rangle e_1 + \langle x, e_2 \rangle e_2 + \langle x, e_3 \rangle e_3 \\ &=& 0.e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} e_2 + \frac{1}{2} e_3 \\ &=& (\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}) \end{array}$$

Khoảng cách từ véctơ x đến L là độ dài của véctơ $x - x' = (\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{4})$ do đó, $\mathrm{d}(x, L) = \|x - x'\| = \frac{36}{16} = \frac{9}{4}$.

Cách 2. Dễ thấy một cơ sở của L là $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$ và

$$\begin{array}{l} \langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle = 2,\ \langle \alpha_2, \alpha_1 \rangle = 2,\ \langle \alpha_3, \alpha_1 \rangle = -1 \\ \langle x, \alpha_1 \rangle = 0,\ \langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle = 4,\ \langle \alpha_3, \alpha_2 \rangle = 0, \\ \langle x, \alpha_2 \rangle = 1,\ \langle \alpha_3, \alpha_3 \rangle = 2,\ \langle x, \alpha_3 \rangle = 1 \end{array}$$

Do đó, hình chiếu x' của x có dạng

$$x' = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3$$

trong đó $x_1,\ x_2,\ x_3$ là nghiệm của hệ

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x_1 + 2x_2 - x_3 &=& 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 0x_3 &=& 1 \\ -x_1 + 0x_2 + 2x_3 &=& 1 \end{array} \right.$$

Giải hệ, ta có nghiệm $x_1 = 0,\ x_2 = \frac{1}{4},\ x_3 = \frac{1}{2}$, do đó

$$x' = 0\alpha_1 + \frac{1}{4}\alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_3 = (\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4})$$

và $\mathrm{d}(x, L) = \|x - x'\| = \frac{9}{4}$.

b. Cách 1. Tìm một cơ sở trực chuẩn của L, theo bài 1c., đó là cơ sở:

$$e_1 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0),\ e_2 = (-\frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{2}{\sqrt{15}}, -\frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{3}{\sqrt{15}})$$

Do đó, hình chiếu trực giao x' của x lên L là:

$$\begin{aligned} x' &= \langle x, e_1\rangle.e_1 + \langle x, e_2\rangle.e_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}e_1 + \frac{4}{\sqrt{15}}e_2 \\ &= (\frac{6}{15}, \frac{18}{15}, \frac{6}{15}, \frac{12}{15}) = (\frac{2}{5}, \frac{6}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}) \end{aligned}$$

và khoảng cách từ x đến L là:

$$\mathrm{d}(x, L) = \|x - x'\| = \left\|(\frac{3}{5}, -\frac{6}{5}, \frac{3}{5}, \frac{6}{5})\right\| = \frac{90}{25} = \frac{18}{5}$$

Cách 2. Đầu tiên ta tìm một cơ sở của L. Một cơ sở của L là hệ nghiệm cơ bản của hệ:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 &= 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \end{cases}$$

theo bài 1c., cơ sở đó là

$$\alpha_1 = (1, 1, 1, 0),\ \alpha_2 = (0, 1, 0, 1)$$

Ta có

$$\langle \alpha_1, \alpha_1\rangle = 3,\ \langle \alpha_2, \alpha_1\rangle = 1,\ \langle x, \alpha_1\rangle = 2,\ \langle \alpha_2, \alpha_2\rangle = 2,\ \langle x, \alpha_2\rangle = 2$$

Hình chiếu trực giao x' của x lên L là véctơ $x' = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2$, trong đó, $x_1,\ x_2$ là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 &= 2 \end{cases}$$

do đó, $x_1 = \frac{2}{5},\ x_2 = \frac{4}{5}$.
Vậy

$$x' = \frac{2}{5}\alpha_1 + \frac{4}{5}\alpha_2 = (\frac{2}{5}, \frac{6}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5})$$

và $\mathrm{d}(x, L) = ||x - x'|| = \frac{18}{5}$.

□

4. Cho L là không gian véctơ con của không gian Euclide E và $x_o \in E$. Ta gọi tập

$$P := L + x_o = \{x + x_o | x \in L\}$$

là một đa tạp tuyến tính của E. Khoảng cách từ một véctơ $\alpha \in E$ đến đa tạp P, ký hiệu $\mathrm{d}(\alpha, P)$ xác định bởi:

$$\mathrm{d}(\alpha, P) = min\{\|\alpha - u\| : u \in P\}$$

Chứng minh rằng khoảng cách $\mathrm{d}(\alpha, P)$ bằng độ dài đường trực giao hạ từ véctơ $\alpha - x_o$ đến L (tức là $\mathrm{d}(\alpha, P) = \mathrm{d}(\alpha - x_o, L)$.

Giải. Giả sử hình chiếu trực giao của $\alpha - x_o$ lên L là β, tức là $\alpha - x_o = \beta + \gamma$, trong đó, $\beta \in L,\ \gamma \perp L$. Khi đó

$$\mathrm{d}(\alpha - x_o, L) = \|\gamma\|$$

với mọi véctơ $u = x_o + y \in P$ (tức là $y \in L$), ta có

$$\begin{aligned}\|\alpha - u\| &= \sqrt{\langle \alpha - u, \alpha - u\rangle} = \sqrt{\langle \alpha - x_o - y, \alpha - x_o - y\rangle} \\ &= \sqrt{\langle \beta - y + \gamma, \beta - y + \gamma\rangle} = \sqrt{\|\beta - y\|^2 + \|\gamma\|^2} \quad \geq \|\gamma\| \\ &(\langle \beta - y, \gamma\rangle = 0 \text{ vì } \gamma \perp \beta - y \in L)\end{aligned}$$

do đó $\min \|\alpha - u\| = \|\gamma\|$, dấu bằng xảy ra khi

$$\begin{aligned}\|\beta - y\|^2 = 0 &\iff \beta = y = u - x_o \\ &\iff u = x_o + \beta\end{aligned}$$

Vậy

$$\mathrm{d}(\alpha, P) = \min\{\|\alpha - u\|\} = \mathrm{d}(\alpha - x_o, L)$$

dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $u = x_o + \beta$, trong đó β là hình chiếu trực giao của $\alpha - x_o$ lên L. □

5. Tìm khoảng cách từ véctơ $\alpha = (2, 1, 4, 4)$ đến đa tạp P xác định bởi hệ phương trình tuyến tính:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 &= 3 \\ x_2 - x_3 + x_4 &= 3 \end{cases} \qquad (1)$$

Giải. Đầu tiên ta phải viết đa tạp P dưới dạng

$$(P) = L + x_o = \{x + x_o |\, x \in L\}$$

trong đó, L là không gian véctơ con của $\mathbb{R}^4$. Vì tập nghiệm của hệ phương trình (1) chính bằng tập nghiệm hệ phương trình tuyến tính thuần nhất tương ứng của hệ (1) cộng với nghiệm riêng của hệ (1), do đó, L chính là không gian con các nghiệm của hệ thuần nhất tương ứng hệ (1)

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 &= 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \end{cases} \qquad (L)$$

còn x_o là nghiệm riêng bất kỳ của hệ (1). Ta có $x_o = (1, 2, 3, 4)$ là nghiệm của hệ (1)
Theo bài tập 4. $\mathrm{d}(\alpha, P) = \mathrm{d}(\alpha - x_o, L)$. Vậy ta cần tìm khoảng cách từ véctơ $\alpha - x_o = (1, -1, 1, 0)$ đến không gian con L các nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 &= 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \end{cases}$$

theo bài 3., $\mathrm{d}(\alpha - x_o, L) = \frac{9}{4}$
Vậy, $\mathrm{d}(\alpha, P) = \frac{9}{4}$ □

6. Cho L là KGVT con của không gian Euclide E. Ký hiệu:

$$L^{\perp} = \{x \in E |\, x \perp L\}$$

Chứng minh

a. $L^{\perp}$ là KGVT con của E. $L^{\perp}$ gọi là phần bù trực giao của L.

b. $(L^{\perp})^{\perp} = L$

c. $L + L^{\perp} = E,\ L^{\perp} \cap L = \{0\}$

d. $\dim L^{\perp} + \dim L = \dim E$

Giải. **a.** Kiểm tra trực tiếp dựa vào tiêu chuẩn không gian véctơ con.

b. Giả sử $\alpha \in L$, khi đó $\forall \beta \in L^{\perp}$, ta có $\beta \perp L$, do đó $\beta \perp \alpha$. Vậy $\alpha \perp L^{\perp}$ nên $\alpha \in (L^{\perp})^{\perp}$.

Ngược lại, giả sử $\alpha \in (L^{\perp})^{\perp}$, khi đó $\alpha \perp L^{\perp}$. Hình chiếu trực giao của α lên L là α', ta có

$$\alpha = \alpha' + \beta, \quad \beta \perp L,\ \alpha' \in L$$

vì $\beta \in L^{\perp}$ nên $\beta \perp \alpha,\ \beta \perp \alpha'$, do đó

$$0 = \langle \alpha, \beta \rangle = \langle \alpha' + \beta, \beta \rangle = \langle \alpha', \beta \rangle + \langle \beta, \beta \rangle = \langle \beta, \beta \rangle$$

từ đó $\langle \beta, \beta \rangle = 0$ nên $\beta = 0$ và $\alpha = \alpha' \in L$.

c. Với mỗi $\alpha \in L$, gọi α' là hình chiếu của α lên L, ta có:

$$\alpha = \alpha' + \beta, \quad \alpha' \in L,\ \beta \perp L$$

tức là $\beta \in L^{\perp}$ nên $\alpha \in L + L^{\perp}$. Vậy $L + L^{\perp} = E$.

Nếu $\alpha \in L^{\perp} \cap L$ thì $\alpha \in L^{\perp}$ nên $\alpha \perp L$, do đó $\alpha \perp \alpha$ tức là $\langle \alpha, \alpha \rangle = 0$. Vậy, $\alpha = 0$ nghĩa là $L^{\perp} \cap L = \{0\}$.

d. $\dim L^{\perp} + \dim L = \dim(L^{\perp} + L) - \dim(L^{\perp} \cap L) = \dim E - \dim\{0\} = \dim E$

$\square$

7. Tìm cơ sở trực giao, cơ sở trực chuẩn của không gian con $L^{\perp}$ của $\mathbb{R}^4$, biết L là các không gian con dưới đây:

a. $L = \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$ với $\alpha_1 = (1, 0, -1, 2),\ \alpha_2 = (-1, 1, 0, -1)$

b. L là không gian con các nghiệm của hệ

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 & = & 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 & = & 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 & = & 0 \end{array}\right. \qquad (1)$$

Giải. Để tìm cơ sở trực giao, cơ sở trực chuẩn của $L^{\perp}$, ta tìm một cơ sở của $L^{\perp}$. Sau đó, sẽ trực giao hóa, trực chuẩn hóa như trong bài tập 1.

a. Véctơ

$$\begin{aligned} x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in L^{\perp} &\iff x \perp L \\ &\iff x \perp \alpha_1 \text{ và } x \perp \alpha_2 \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl} \langle x, \alpha_1 \rangle & = & 0 \\ \langle x, \alpha_2 \rangle & = & 0 \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl} x_1 - x_3 + 2x_4 & = & 0 \\ -x_1 + x_2 - x_4 & = & 0 \end{array}\right. \qquad (2) \end{aligned}$$

Vậy, $L^{\perp}$ chính là không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính trên, do đó hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình tuyến tính (2) chính là một cơ sở của $L^{\perp}$. Việc tìm cơ sở trực giao, trực chuẩn của $L^{\perp}$ bây giờ được tiến hành giống như trong bài tập 1c. Các tính toán chi tiết xin dành cho bạn đọc.

b. Véctơ

$$\begin{aligned} x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in L &\iff (x_1,x_2,x_3,x_4) \text{ là nghiệm của hệ (1)}\\ &\iff \begin{cases} \langle x,\beta_1\rangle &= 0\\ \langle x,\beta_2\rangle &= 0\\ \langle x,\beta_3\rangle &= 0\end{cases}\end{aligned}$$

trong đó $\beta_1=(1,-1,1,-1),\ \beta_2=(2,1,-1,1),\ \beta_3=(1,2,-2,2))$

$$\begin{aligned} &\iff x\perp\beta_1,\ x\perp\beta_2,\ x\perp\beta_3\\ &\iff x\perp\langle\beta_1,\beta_2,\beta_3\rangle\end{aligned}$$

Như vậy $x\in L\Leftrightarrow x\perp U=\langle\beta_1,\beta_2,\beta_3\rangle,\Leftrightarrow x\in U^\perp$ tức là $L=U^\perp$, do đó $L^\perp=U$. Vậy, $L^\perp=\langle\beta_1,\beta_2,\beta_3\rangle$. Từ đó, một hệ con ĐLTT tối đại của hệ $\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3$ là cơ sở của $L^\perp$. Dễ thấy $\beta_1,\ \beta_2$ là cơ sở của $L^\perp$. Việc trực giao hóa, trực chuẩn hóa hệ véctơ $\beta_1,\ \beta_2$ để được cơ sở trực giao, cơ sở trực chuẩn của $L^\perp$ khá đơn giản (tiến hành như bài tập 1a). Chi tiết xin được dành cho bạn đọc.

□

8. Cho $L_1,\ L_2$ là các không gian con của KGVT Euclide E với $\dim L_1<\dim L_2$. Chứng minh tồn tại véctơ $\alpha\neq 0,\ \alpha\in L_2$ và α trực giao với L_1

Giải. Ta có

$$\dim L_1+\dim L_1^\perp=\dim L_2+\dim L_2^\perp=\dim E \text{ (Bài tập 6)}$$

Do $\dim L_1<\dim L_2$ nên $\dim L_1^\perp>\dim L_2^\perp$
Mặt khác

$$\begin{aligned}\dim(L_2\cap L_1^\perp) &= \dim L_2+\dim L_1^\perp-\dim(L_2+L_1^\perp)\\ &> \dim L_2+\dim L_2^\perp-\dim(L_2+L_1^\perp)\\ &= \dim E-\dim(L_2+L_1^\perp)\geq 0\end{aligned}$$

Vậy $\dim(L_2\cap L_1^\perp)>0$ do đó $L_2\cap L_1^\perp\neq\{0\}$, nên tồn tại véctơ $\alpha\in L_2\cap L_1^\perp,\ \alpha\neq 0$. Rõ ràng $\alpha\in L_2$ và $\alpha\perp L_1$ □

9. Chứng minh rằng mọi hệ véctơ trực giao không chứa véctơ không đều độc lập tuyến tính.

Giải. Giả sử $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ là hệ trực giao, không chứa véctơ không ($\alpha_i\neq 0$) của không gian véctơ Euclide và giả sử $\sum_{j=1}^m a_j\alpha_j=0$. Khi đó, với mọi i, ta có:

$$0=\langle\alpha_i,0\rangle=\langle\alpha_i,\sum_{j=1}^m a_j\alpha_j\rangle=\sum_{j=1}^m a_j\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle=a_i\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle$$

do đó $a_i\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle=0$ với mọi i, vì $\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle\neq 0$ nên $a_i=0,\ \forall i$. Vậy, hệ $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ là hệ ĐLTT. □

10. Chứng minh rằng: Trong không gian Euclide, ma trận đổi cơ sở giữa 2 cơ sở trực chuẩn là ma trận trực giao.

Giải. Giả sử $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ (α) và $\beta_1,\dots,\beta_n$ (β) là cơ sở trực chuẩn của không gian Euclide E và giả sử:

$$\beta_j=\sum_{i=1}^n a_{ij}\alpha_i \text{ với mọi } j=1,2,\dots,n$$

$$\alpha_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\beta_i \text{ với mọi } j = 1, 2, \ldots, n$$

Gọi $\mathbf{T}$ là ma trận đổi cơ sở từ (α) sang (β) thì:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{và} \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

Ta có

$$\langle \alpha_k, \beta_l \rangle = \langle \alpha_k, \sum_{i=1}^{n} a_{il}\alpha_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_{il}\langle \alpha_k, \alpha_i \rangle = a_{kl}$$

Mặt khác

$$\langle \alpha_k, \beta_l \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} b_{ik}\beta_i, \beta_l \rangle = \sum_{i=1}^{n} b_{ik}\langle \beta_i, \beta_l \rangle = b_{lk}$$

Vậy $b_{lk} = a_{kl}$ với mọi k, l, tức là $\mathbf{T}^t = \mathbf{T}^{-1}$, do đó, $\mathbf{T}$ là ma trận trực giao. □

11. Cho E là KGVT Euclide. Chứng minh rằng phép biến đổi tuyến tính của E, $f : E \to E$ là phép biến đổi trực giao khi và chỉ khi f là bảo toàn độ dài của một véctơ ($\|f(\alpha)\| = \|\alpha\|$) với mọi $\alpha \in E$

Giải. Nếu f là phép biến đổi trực giao thì

$$\forall \alpha \in E, \langle f(\alpha), f(\alpha) \rangle = \langle \alpha, \alpha \rangle$$

do đó $\|f(\alpha)\| = \|\alpha\|$. Để chứng minh chiều ngược lại, ta có nhận xét: $\forall \alpha, \beta \in E$,

$$\langle \alpha + \beta, \alpha + \beta \rangle = \langle \alpha, \alpha \rangle + \langle \beta, \beta \rangle + 2\langle \alpha, \beta \rangle$$

do đó

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \frac{1}{2}(\|\alpha + \beta\|^2 - \|\alpha\|^2 - \|\beta\|^2) \quad (*)$$

Bây giờ giả sử f bảo toàn độ dài của véctơ, khi đó, do công thức $(*)$, ta có

$$\begin{aligned} \langle f(\alpha), f(\beta) \rangle &= \frac{1}{2}(\|f(\alpha) + f(\beta)\|^2 - \|f(\alpha)\|^2 - \|f(\beta)\|^2) \\ &= \frac{1}{2}(\|\alpha + \beta\|^2 - \|\alpha\|^2 - \|\beta\|^2) = \langle \alpha, \beta \rangle \end{aligned}$$

Vậy, f là phép biến đổi trực giao. □

[1]

[1]Đánh máy: LÂM HỮU PHƯỚC, Ngày: 27/02/2006